Graphische Tabellen

und

graphisch dargestellte Formeln

zur **sofortigen** Dimensionierung von Eisenbeton-Plattendecken resp. Plattenbalken bei **beliebiger,** aber **wirtschaftlich-rationeller** Ausnutzung der Materialien, Eisen und Beton, hinsichtlich ihrer Inanspruchnahme auf Zug resp. Druck.

Aufgestellt in vollkommener Übereinstimmung mit den preußischen Ministerialbestimmungen vom 16. April 1904

von

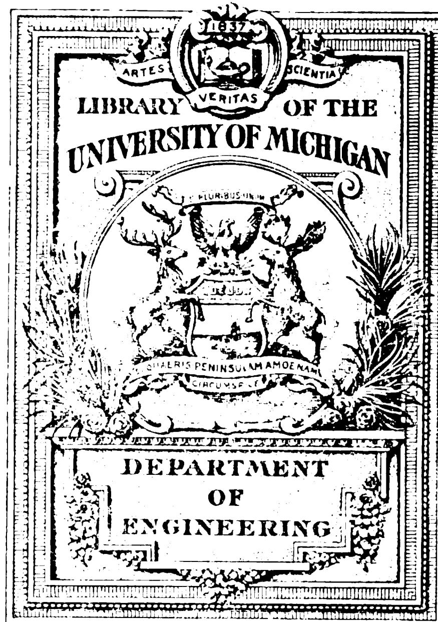
Emanuel Haimovici,
Dipl.-Ingenieur in Leipzig.

Hierzu fünf Lichtdrucktafeln auf milimetriertem Grund 48/63 cm.



LEIPZIG
Kommissions-Verlag von B. G. Teubner
1906.





Graphische Tabellen

und

graphisch dargestellte Formeln

zur **sofortigen** Dimensionierung von Eisenbeton-Plattendecken resp. Plattenbalken bei **beliebiger,** aber **wirtschaftlich-rationeller** Ausnutzung der Materialien, Eisen und Beton, hinsichtlich ihrer Inanspruchnahme auf Zug resp. Druck.

Aufgestellt in **vollkommener Übereinstimmung** mit den **preußischen Ministerialbestimmungen** vom 16. April 1904

von

Emanuel Haimovici,
Dipl.-Ingenieur in Leipzig.

Hierzu fünf Lichtdrucktafeln auf millimetriertem Grund 48/63 cm.



LEIPZIG
Kommissions-Verlag von B. G. Teubner
1906.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Herrn

Architekt u. königl. Sächs. Baurat

STADTRAT MAX POMMER

in LEIPZIG

als Zeichen der Verehrung

ergebenst gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Vorliegende Arbeit bezweckt auf graphischem Wege eine leichte, übersichtliche, rasche und genaue Querschnittsdimensionierung von auf Biegung beanspruchten Tragkonstruktionen in Eisenbeton — [Plattendecken resp. Plattenbalken] — bei einer beliebigen, aber wirtschaftlich rationellen Ausnutzung der Materialien Eisen und Beton hinsichtlich ihrer Inanspruchnahme auf Zug resp. Druck.

Die beiliegenden fünf Tafeln sind unabhängig von dem Biegungsmomente M — also unabhängig von der Spannweite und Belastungsart, sowie von der Ausbildungsart der Tragkonstruktion —, von der zum Balken resp. Decke angenommenen Druckbreite b, Deckenstärke d und nutzbare Höhe h_0, schließlich unabhängig von der Eiseneinlage F_e und den Spannungen σ_b für Beton auf Druck und σ_{fe} für Eisen auf Zug — also unabhängig von der Lage der Neutralachse, gegeben durch den Abstand x von der Oberfaser —; jedoch sind die Tafeln abhängig von dem Koeffizienten

$$n = E_{fe} : E_b = 15$$

und dem Proportionalitätsgesetz linearer Spannungsverteilung

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_{fe}} = \frac{x}{n\,(h_0 - x)}$$

unter Vernachlässigung der Betonzugspannungen unterhalb der Neutralachse und der Betondruckspannungen im Balkensteg oberhalb der Neutralachse.

Die Frage der Scherspannungen ist in diesen Tafeln außer Acht gelassen aus mannigfachen Gründen: in erster Reihe, um die Tafeln an ihrer Übersichtlichkeit nicht zu beeinträchtigen, sodann, weil die Frage der Scherspannungen im Eisenbeton noch eingehenderer Lösungen als der bis zurzeit aus Theorie und Versuchen bekannten Ergebnisse bedarf, schließlich, weil die Scherspannungen in beliebiger Schnittlage, entsprechend der für diese Schnittlage zu rechnenden Querkraft, auf ein bestimmtes Maß reduziert werden können, ohne an die wirtschaftlich bestimmte oder aus besonderen Gründen beschränkt gegebene Balkenhöhe zu ändern, durch entsprechende Verbreiterung des Balkensteges, durch schräg abgebogene Stangen, durch

Bügeleinlagen, und an Auflagerstellen durch Vouten- oder Konsolanschlüsse, was auch den auftretenden negativen Biegungsmomenten zugute kommen dürfte.

Der Einwand, daß in den Tafeln 1, 2 und 3 bei flach verlaufenden Kurven Ablesungen nur mit Mühe zu machen sind, wird durch die Übung und Anwendung der Tafeln 4 und 5 behoben. Für Voranschläge sind jedoch die Tafeln 1, 2 und 3 hinsichtlich der wirtschaftlichen Dimensionierung und des raschen Arbeitens bei genügend genauen Ergebnissen unentbehrlich. Für genauere Nachweise dürften sich die Tafeln 4 und 5 eignen, bei immerhin noch wirtschaftlicher Ausnutzung der Spannungen und rascher Arbeit.

Geringe zeichnerische Fehler oder ungenügend genau gemachte Ablesungen haben auf die Richtigkeit der Ergebnisse und der Übereinstimmung derselben mit den Formeln nach den preußischen Bestimmungen des Ministerialerlasses vom 16. April 1904 oder mit den vom Verfasser abgeleiteten allgemein gültigen Formeln*) keinen nennenswerten Einfluß.

Möge vorliegende Arbeit als ein Beitrag zu den neueren Berechnungsmethoden von Eisenbetonkonstruktionen betrachtet werden und den Beifall aller derjenigen finden, die dieser Bau- und Berechnungsweise wissenschaftliches und ökonomisches Interesse entgegenbringen.

*) Siehe Abschnitt II dieser Abhandlung.

Der Verfasser.

Erster Abschnitt.

Gebrauchsanweisung der graphischen Tabellen und graphisch dargestellter Formeln.

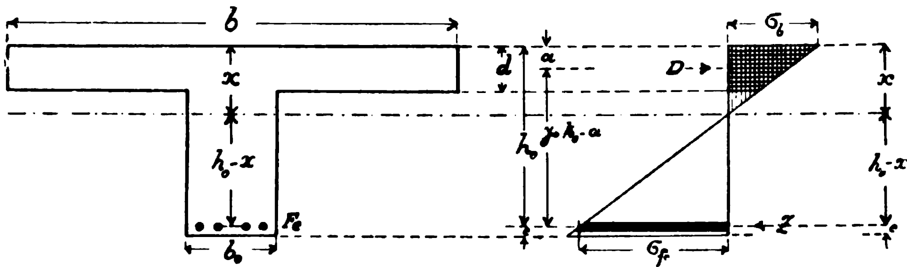


Fig. 1

Es bezeichnen: mit Bezug auf vorstehende Figur 1

M das Biegungsmoment der äußeren Kräfte,
b die zu einem Balken oder zu einer Decke angenommene Druckbreite,
b_o die Breite des Balkensteges,
h_o die nutzbare Balken- oder Deckenhöhe, d. h. der Abstand der Oberfaser vom Schwerpunkt der Eiseneinlage,
d die zu einem Balken gehörende Plattendicke,
x der Abstand der Neutralfaser von der Oberfaser,
F_e die Eiseneinlage,
σ_b die Betondruckspannung,
σ_{fe} die Eisenzugspannung,
e der Abstand der Unterfaser vom Schwerpunkt der Eiseneinlage.

Die folgenden Bezeichnungen, die für den Gebrauch der Tafeln nicht in Betracht kommen (sondern zu Kontrollrechnungen) mögen ebenfalls aufgeführt werden:

a Der Abstand des Druckmittelpunktes von der Oberfaser. Ist die Druckfläche ein Dreieck, so ist $a = \frac{1}{3} x$; ist die Druckfläche ein Trapez mit den Seiten σ_b und $\sigma_b \frac{x-d}{x}$ und der Höhe d, so ist

$$a = \frac{d}{3} \cdot \frac{3x-2d}{2x-d}$$

$y = h_o - a$ der Abstand des Druckmittelpunktes vom Schwerpunkt der Eiseneinlage.

Schließlich D = Druckkraft im Beton unter Vernachlässigung der Druckspannungen im Balkensteg oberhalb der Neutralfaser und Z = Zugkraft im Eisen unter Vernachlässigung der Zugspannungen im Beton unterhalb der Neutralfaser (siehe Einleitung) $D \cdot y = Zy = M$ dem Biegungsmomente der äußeren Kräfte.

Tafel I.

Graphische Tabellen.

Für: $x \leq d$, $n = \frac{E_f}{E_b} = 15$,

σ_b = **beliebig bis 48 kg/cm²**

σ_{fe} = **1200 kg/cm² resp. 1000 kg/cm² resp. beliebig**

h_o = **beliebig bis 100 cm.**

Aufgabe 1.

Gegeben sind:	Gesucht werden:
M in cm/kg	σ_b in kg/cm²
b in cm	x in cm
h_o in cm (auch wählbar)	F_e in cm²
d in cm	
$\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm²	

Man bildet den Wert $\frac{M}{b}$ und liest denselben am Rande eines der beiden Quadranten links (Quadrant für $\frac{M}{b}$, oben für Balken mit $h_o = 30$ bis 100 cm, von zwei zu zwei Zentimeter, unten, in einem etwas größeren Maßstabe, für $h_o = 5$ bis 30 cm von Zentimeter zu Zentimeter und von 30 bis 50 cm von zwei zu zwei Zentimeter) ab, zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Horizontale bis zum Schnitt mit der Kurve des gegebenen oder nach wirtschaftlichem und ästhetischem Ermessen zu wählenden h_o, lotet den Schnittpunkt auf die Mittelhorizontale des Blattes und liest dort σ_b in kg: cm² direkt ab. Geht man mit dem abgelesenen σ_b in den Quadranten rechts (oben Quadrant für x, unten Quadrant für F_e bei $b = 100$ cm; beide Quadrante für $h_o = 5$ bis 100 cm von Zentimeter zu Zentimeter und von zwei zu zwei Zentimeter) und zieht durch diesen Punkt auf der Mittelhorizontale des Blattes eine Lotrechte nach oben und nach unten bis zum Schnitt mit der Kurve des gegebenen oder gewählten h_o, zieht durch die erhaltenen Schnittpunkte Horizontalen bis zum äußersten Rande dieser Quadranten rechts, so liest man dort die Werte von x in cm resp. von F_e in cm² für $b = 100$ cm direkt ab. Ist $b = v \cdot 100$ cm, so hat man statt des abgelesenen F_e zu nehmen $v \cdot F_e$. Ist das vorherig abgelesene $x > d$ (x größer als das gegebene d), so ist Gebrauch zu machen von den Tafeln II resp. III.

Aufgabe 2.

Gegeben sind:	Gesucht werden:
M in cm/kg	x in cm
b in cm	σ_b in kg/cm²
h_o in cm (auch wählbar)	σ_{fe} in kg/cm²
d in cm	
F_e in cm²	

Man bildet den Wert $\frac{F_e}{b}$ (wobei zu beachten ist, aus den oben angegebenen Gründen, daß F_e in cm² und b in Metern eingesetzt wird) und liest denselben am Rande rechts des unteren Quadranten für F_e ab, zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Horizontale bis zum Schnitt mit der Kurve des gegebenen oder zu wählenden h_o, lotet den Schnittpunkt auf die Mittelhorizontale des Blattes und liest dort σ_b in kg/cm² direkt ab. (Dieses σ_b entspricht natürlich einem $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm².) Verlängert man die eben gezogene Lotrechte durch das so abgelesene σ_b nach oben im Quadranten für x bis zum Schnitt mit der Kurve des gegebenen oder gewählten h_o, zieht durch den erhaltenen Schnittpunkt eine Horizontale bis zum äußersten Rande

rechts des Quadranten für x, so liest man dort den Wert von x in cm direkt ab. Geht man mit dem abgelesenen σ_b in den Quadranten links und zieht durch diesen Punkt auf der Mittelhorizontalen des Blattes eine Lotrechte nach oben oder nach unten bis zum Schnitt mit der Kurve des gegebenen oder gewählten h_0, zieht durch den erhaltenen Schnittpunkt eine Horizontale bis zum äußersten Rande dieser Quadranten links, so liest man dort den Wert von $\frac{M}{b}$ direkt ab. (Dieses $\frac{M}{b}$ entspricht natürlich einem $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm².) Ist nun das zunächst abgelesene $x > d$, dann ist Gebrauch zu machen von den Tafeln II resp. III. Ist das zuletzt abgelesene $\frac{M}{b}$ identisch mit dem gegebenen $\frac{M}{b}$, dann sind die Spannungen identisch mit dem abgelesenen σ_b und dem $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm². Ist das abgelesene $\frac{M}{b}$ verschieden von dem gegebenen $\frac{M}{b}$, dann sind die Spannungen mit Hilfe des Rechenschiebers leicht und hinreichend genau bestimmt, wie folgt: Es verhalten sich nämlich:

$$\frac{\text{Abgelesenes } \frac{M}{b}}{\text{gegebenen } \frac{M}{b}} = \frac{\text{abgelesenes } \sigma_b}{\text{wirklichen } \sigma_b} = \frac{\sigma_{fe} = 1200 \text{ kg/cm}^2}{\text{wirklichen } \sigma_{fe}}$$

Hieraus folgt, daß die Tafel für jedes beliebige σ_{fe}', und σ_b zu gebrauchen ist, und zwar wie folgt:

a) Soll z. B. statt $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² die beliebige Spannung σ_{fe}' ausgenutzt werden, dann hat man statt des wirklichen $\frac{M}{b}$ zu nehmen $\frac{M}{b} \cdot \frac{1200}{\sigma_{fe}'}$, bezeichnet diesen Wert mit $\left(\frac{M}{b}\right)'$ und verfährt genau wie unten Aufgabe 1 erörtert wurde. Die Werte von x und F_e bleiben natürlich genau so, wie sie abgelesen wurden. Das abgelesene σ_b ist jedoch nicht das zur Spannung σ_{fe}' entsprechende, sondern man erhält zum Schluß der Aufgabe das wirkliche σ_b, indem man mit Hilfe des Rechenschiebers den Wert rechnet: abgelesenes $\sigma_b \cdot \frac{\sigma_{fe}'}{1200}$, oder mit Hilfe eines Papierstreifens, auf dem der abgeänderte Maßstab der σ_b auf der Mittelhorizontale im Verhältnis $\frac{\sigma_{fe}'}{1200}$ aufgetragen ist, und überdeckt damit die Mittelhorizontale, dann sind auch die wirklichen σ_b direkt abzulesen.

b) Sollen z. B. die beliebigen Spannungen σ_{fe}' und σ_b ausgenutzt werden, dann hat man statt des wirklichen $\frac{M}{b}$ zu nehmen $\frac{M}{b} \frac{1200}{\sigma_{fe}'}$, bezeichnet diesen Wert mit $\left(\frac{M}{b}\right)'$, statt des wirklichen σ_b zu nehmen $\sigma_b \frac{1200}{\sigma_{fe}'}$, bezeichnet diesen Wert mit $(\sigma_b)'$, liest den so erhaltenen Wert $\left(\frac{M}{b}\right)'$ am Rande links ab und den Wert $(\sigma_b)'$ auf der Mittelhorizontalen ab, zieht durch ersteren Punkt eine Horizontale, durch letzteren eine Lotrechte und liest in einem der Quadranten links im Schnittpunkte genannter zwei Linien das erforderliche h_0 direkt oder durch Interpolation ab. Da die Kurven h_0 von Zentimeter zu Zenti-

meter resp. von zwei zu zwei Zentimeter vorhanden sind, so ist die Interpolation leicht und hinreichend genau zu machen. Hat man das h_0, dann verfährt man zur Bestimmung von x und F_e genau so wie unten Aufgabe 1 erörtert wurde, natürlich nicht mit dem wirklichen σ_b, sondern mit dem Werte $\sigma_b \frac{1200}{\sigma_{fe}'} = (\sigma_b)'$.

Die Werte von x und F_e bleiben natürlich genau, so wie sie abgelesen wurden.

Nachdem die hauptsächlich vorkommenden Aufgaben und die allgemeine Gültigkeit der Tafel zwecks Lösung dieser Aufgaben beschrieben worden sind, ist es klar, daß auch jede zu stellende Aufgabe, von den sieben Größen $\frac{M}{b}$, h_0, d, x, F_e, σ_b und σ_{fe} drei derselben direkt oder indirekt zu bestimmen, wenn die vier andern gegeben sind, mit Hilfe der Tafel leicht, übersichtlich, rasch und genügend genau zu lösen ist. Daß die Übereinstimmung der Ergebnisse in vollkommenem Einklang mit den preußischen Ministerialbestimmungen und den vom Verfasser abgeleiteten Formeln ist, ist bereits in der Einleitung erwähnt worden.

Vorstehende Erörterungen mögen noch durch einige Rechnungsbeispiele ergänzt werden, um den praktischen Gebrauch der Tafel, auch hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit der Querschnittsdimensionierung zu veranschaulichen. Der Rechnungsvorgang ist genau wie früher beschrieben (siehe Aufgabe 1 resp. Aufgabe 2), und sind die entsprechenden Linienzüge an Hand der Millimeternetzlinien der Tafel leicht zu verfolgen.

Beispiel 1. (vgl. Aufgabe 1)

Gegeben sind:	Gesucht werden:
$M = 3000000$ cm/kg	σ_b in kg/cm²
$b = 250$ cm	x in cm
$h_0 = 45$ cm (auch wählbar)	F_e in cm²
$d = 15$ cm	
$\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm²	

$\frac{M}{b} = \frac{3\,000\,000}{250} = 12\,000$. Hierzu entspricht im Quadranten für $\frac{M}{b}$ bei der Kurve für $h_0 = 45$ (interpoliert, etwa über die Mitte zwischen der Kurve für $h_0 = 44$ und $h_0 = 46$) ein Wert von $\sigma_b = 40$ kg/cm². Zu diesem Werte von $\sigma_b = 40$ kg/cm² entsprechen in den Quadranten für x resp. F_e bei der interpolierten Kurve für $h_0 = 45$ ein Wert von $x = 15$ cm resp. von $F_e = 25$ cm² für $b = 100$ cm.

Da $b = 2{,}5 \cdot 100$, so ist das erforderliche $F_e = 25 \cdot 2{,}5 = 62{,}5$ cm².

Zusammenstellung des Rechnungsvorganges:

$$M = 3000000 \text{ cm/kg}$$
$$b = 250 \text{ cm}$$
$$\frac{M}{b} = 12000,\ h_0 = 45 \text{ cm},\ \sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2,\ \sigma_{fe} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$
$$d = 15 \text{ cm},\quad x = 15 \text{ cm} = d,\quad F_e = 25 \cdot 2{,}5 = 62{,}5 \text{ cm}^2.$$

Würde man statt $h_0 = 45$ cm wählen $h_0 = 42$ cm, so sind die Ergebnisse:

$$\sigma_b = 43{,}8 \text{ kg/cm}^2,\ x = 14{,}80 \text{ cm}$$
$$F_e = 27{,}1 \cdot 2{,}5 = 67{,}7 \text{ cm}^2.$$

Angenommen in beiden Fällen die Stegbreite des Balkens zu $b_0 = 30$ cm, dann ist von $h_0 = 45$ cm auf $h_0 = 42$ cm eine Verringerung des Betonquerschnittes um 0,009 m³/m gegenüber einer Vermehrung des Eisenquerschnittes um

5,2 cm²/m. Je nach den örtlichen Verhältnissen, Materialpreisen und zulässigen Beanspruchungen wird man das h_0 derart wirtschaftlich wählen, daß bei einer Verminderung der Betondruckspannungen, also durch Erhöhung des Balkens, wenn keine beschränkte oder aus ästhetischen Gründen vorgeschriebene Höhe eingehalten werden soll, die Mehrkosten an Beton geringer oder höchstens gleich den Minderkosten an Eisen zu stehen kommen.

Die Grenze des Ausgleichs der Kosten ist mit Leichtigkeit aus der Tafel zu bestimmen.

Für die vorgeführten Fälle $h_0 = 45$ cm und $h_0 = 42$ cm wird man sich natürlich, wenn nichts weiter vorgeschrieben ist, für $h_0 = 45$ cm bei $\sigma_b = 40$ kg/cm² und $F_e = 62{,}5$ cm² entscheiden. Denn im allgemeinen dürften die Mehrkosten von 0,009 m³/m Mehrbeton im Mischungsverhältnis 1 : 4,5 z. B. gegenüber den Mehrkosten einer Eisenvermehrung von 5,2 cm²/m weit zurückstehen.

An dieser Stelle mag noch erwähnt werden, daß die Wahl der zum Balken gehörenden Druckbreite $b = \frac{1}{3}\,l$ (ein Drittel der Balkenspannweite nach den preußischen Ministerialbestimmungen) nicht immer die günstigste ist. Bis zu gewissen Grenzen ist es oft wünschenswert, geringere Druckbreiten als $^1/_3\,l$ anzunehmen, wodurch zwar die Betondruckspannungen erhöht werden, aber die Eiseneinlage bleibt nahezu die nämliche oder wird nicht wesentlich überschritten. Es empfiehlt sich vielleicht, eher die Druckbreite vom Achsenabstand der Balken und der Deckenstärke abhängig zu machen in Anbetracht der in Deckenmitte auftretenden Druckbeanspruchungen nach zwei Richtungen hin (wenn Deckenspannweite der Druckbreite b gleich ist) und der an den Anschlüssen der Decken am Balken auftretenden Scherspannungen nach zwei Richtungen hin.

Ein Vorschlag wäre $b = 0{,}75\,l'$ (wobei l' = Achsenabstand der Balken) jedoch nicht größer als 30fache Deckenstärke.

Für das vorgeführte Beispiel mit

$$M = 3000000 \text{ cm und } h_0 = 45 \text{ cm}, \; d = 15 \text{ cm},$$

und $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² wird wenn:

$$b = 250 \text{ cm} : \sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2, \; x = 15{,}0 \text{ cm}, \; F_e = 62{,}5 \text{ cm}^2, \text{ wenn}$$
$$b = 400 \text{ cm} \;\; \sigma_b = 30 \text{ kg/cm}^2, \; x = 12{,}25 \text{ cm}, \; F_e = 61{,}0 \text{ cm}^2,$$

was aus der Tafel leicht zu ersehen ist. Somit bei einer Druckbreite von 150 cm mehr, eine Eisenverringerung von nur 1,5 cm²/m.

Aus den vorhin angegebenen Gründen dürfte man sich entscheiden für $h_0 = 45$ cm bei $b = 250$ cm. Über die Scherkräfte im Balken selbst und Berücksichtigung derselben ist bereits in der Einleitung das Nötige gesagt worden. Die Formeln, wonach die auftretenden Scherspannungen zu berücksichtigen sind, gehören in den Rahmen dieser Abhandlung nicht.

Das vorgeführte Beispiel sei noch nach den preussischen Ministerialbestimmungen geprüft, um die vollkommene Übereinstimmung der Ergebnisse nachzuweisen.

Gegeben: $M = 3000000$ cm/kg, $b = 250$ cm, $h_0 = 45$ cm, $d = 15$ cm, $F_e = 62{,}5$ cm², $n = 15$.

Gesucht: x, σ_b und σ_{fe}.

$$x = \frac{n\,F_e}{b}\left\{-1 + \sqrt{\frac{2 \cdot b \cdot h_0}{n\,F_e} + 1}\right\}$$

$$= \frac{15 \cdot 62{,}5}{250}\left\{-1 + \frac{2 \cdot 250 \cdot 45}{15 \cdot 62{,}5} + 1\right\} = \mathbf{15} \text{ cm} = d$$

$$\sigma_{fe} = \frac{M}{F_e\left(h_o - \frac{x}{3}\right)} = \frac{3\,000\,000}{62{,}5 \cdot (45 - 5)} = \mathbf{1200\ kg/cm^2}.$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{fe}\, x}{n\,(h_o - x)} = \frac{1200 \cdot 15}{15 \cdot (45 - 15)} = \mathbf{40\ kg/cm^2}.$$

Beispiel 2. (Vgl. Aufgabe 2)

Gegeben sind:	Gesucht werden:
$M = 3\,000\,000$ cm/kg	x in cm
$b = 250$ cm	σ_b in kg/cm²
$h_o = 45$ cm	σ_{fe} in kg/cm²
$d = 16{,}2$ cm	
$F_e = 76{,}0$ cm²	

$\frac{F_e}{b} = \frac{76{,}0}{2{,}5} = 30{,}4$. Hierzu entspricht im Quadranten für F_e bei der Kurve für $h_o = 45$ (in der Mitte zwischen der Kurve für $h_o = 44$ und $h_o = 46$) ein Wert von $\sigma_b = 45$ kg/cm². Zu diesem Werte von $\sigma_b = 45$ kg/cm² entsprechen in den Quadranten für x, resp. $\frac{M}{b}$ bei der interpolierten Kurve für $h_o = 45$ ein Wert von $x = 16{,}2$ cm, resp. von $\frac{M}{b} = 14\,400$. Da das gegebene $\frac{M}{b} = 12\,000$ beträgt, so sind die gesuchten Spannungen leicht zu bestimmen, wie früher angegeben.

Es verhalten sich:

$$\frac{\text{Abgelesenes } \frac{M}{b}}{\text{gegebenen } \frac{M}{b}} = \frac{\text{abgelesenes } \sigma_b}{\text{wirklichen } \sigma_b} = \frac{\sigma_{fe} = 1200 \text{ kg/cm}^2}{\text{wirklichen } \sigma_{fe}}$$

Somit $\frac{14\,400}{12\,000} = \frac{45}{37{,}5} = \frac{1200}{1000}$.

Zusammenstellung des Rechnungsvorganges:

$$M = 3\,000\,000 \text{ mehr. } \quad b = 250 \text{ cm.}$$

$$\frac{M}{b} = 12\,000$$

$$\frac{F_e}{b} = 30{,}4, \quad h_o = 45 \text{ cm}, \quad \sigma_b = 45 \text{ kg/cm}^2$$

$$d = 16{,}2 \text{ cm}, \quad x = 16{,}2 \text{ cm} = d, \quad \frac{M}{b} = 14\,400$$

$$\frac{14\,400}{12\,000} = \frac{45}{37{,}5} = \frac{1200}{1000}$$

Somit sind die wirklichen Spannungen:

$$\sigma_b = 37{,}5 \text{ kg/cm}^2$$
$$\sigma_{fe} = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 3. (vgl. Anmkg. a)

Gegeben sind:	Gesucht werden:
$M = 2\,500\,000$ cm/kg	σ_b in kg/cm²
$b = 250$ cm	x in cm
$h_o = 45$ cm	F_e in cm²
$d = 15$ cm	
$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²	

$$\left(\frac{M}{b}\right)' = \frac{M}{b} \cdot \frac{1200}{1000} = \frac{2\,500\,000}{250} \cdot \frac{1200}{1000} = 12\,000$$

Zu $\left(\frac{M}{b}\right)' = 12000$ hatten wir im Beispiel 1 bei $h_o = 45$ cm, $\sigma_b = 40$ kg/cm², $d = 15$ cm, $x = 15$ cm $= d$ und $F_e = 62{,}5$ cm².

Da das gegebene $\frac{M}{b} = 10000$ beträgt, so ist das wirkliche σ_b zu bestimmen, wie früher angegeben. Es verhalten sich:

$$\frac{\text{Abgelesenes}\left(\frac{M}{b}\right)'}{\text{gegebenen}\ \frac{M}{b}} = \frac{\text{abgelesenes}\ \sigma_b}{\text{wirklichen}\ \sigma_b} = \frac{\sigma_{fe} = 1200\ \text{kg/cm}^2}{\text{wirklichen}\ \sigma_{fe}}.$$

$$\text{Somit}\ \frac{12000}{10000} = \frac{40}{33{,}33} = \frac{1200}{1000}.$$

Zusammenstellung des Rechnungsvorganges:

$$M = 2500000\ \text{cm/kg}$$
$$b = 250\ \text{cm}$$
$$\frac{M}{b} = 10000,\quad \sigma_{fe} = 1000\ \text{kg/cm}^2$$
$$\left(\frac{M}{b}\right)' = 12000,\quad h_o = 45\ \text{cm},\quad (\sigma_b)' = 40\ \text{kg/cm}^2$$
$$d = 15\ \text{cm},\quad x = 15\ \text{cm} = d,\quad F_e = 62{,}5\ \text{cm}^2$$
$$\frac{12000}{10000} = \frac{40}{33{,}33} = \frac{1200}{1000}.$$

Somit ist die wirkliche Spannung

$$\sigma_b = 33{,}33\ \text{kg/cm}^2.$$

Beispiel 4. (vgl. Anmkg. b)

Gegeben sind:

$M = 3000000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$d = 16{,}2$ cm
$\sigma_b = 40$ kg/cm²
$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm².

Gesucht werden:

h_o in cm
x in cm
F_e in cm²

$$\left(\frac{M}{b}\right)' = \frac{M}{b}\cdot\frac{1200}{1000} = 14400;\quad (\sigma_b)' = \sigma_b\frac{1200}{1000} = 40\cdot 1{,}2 = 48\ \text{kg/cm}^2.$$

Zu $(\sigma_b)' = 48$ kg/cm² und $\left(\frac{M}{b}\right)' = 14400$ entspricht im Quadranten für $\frac{M}{b}$ ein Wert von $h_o = 42{,}8$ cm. Zu diesem $h_o = 42{,}8$ cm entsprechen in den Quadranten für x, resp. F_e bei $\sigma_b = 48$ kg/cm² ein Wert von $x = 16{,}04$ cm, resp. von $F_e = 32{,}08$ cm² für $b = 100$ cm; da $b = 2{,}5\cdot 100$, so ist das erforderliche $F_e = 32{,}08\cdot 2{,}5 = 80{,}2$ cm².

Zusammenstellung des Rechnungsvorganges:

$$M = 3000000\ \text{cm/kg}\qquad \frac{M}{b} = 12000,\qquad \sigma_b = 40\ \text{kg/cm}^2$$
$$b = 250\ \text{cm}\qquad\qquad \sigma_{fe} = 1000\ \text{kg/cm}^2$$
$$\left(\frac{M}{b}\right)' = 14400,\quad (\sigma_b)' = 48\ \text{kg/cm}^2$$
$$h_o = 42{,}8\ \text{cm},\quad d = 16{,}2\ \text{cm},\quad x = 16{,}04\ \text{cm} < d,\quad F_e = 80{,}2\ \text{cm}^2.$$

Diese vier Beispiele dürften genügen, um auch anders gestellte Aufgaben mit Hilfe der Tafel I, ähnlich wie vorgeführt, zu lösen, und zwar für jedes beliebige σ_b und σ_{fe}.

Bemerkungen zu Tafel I.

Die Ordinaten der in den Quadranten für $\frac{M}{b}$ gestrichelten Kurven mit den Bezeichnungen a resp. a_r, geben lotrecht über oder unter dem abgelesenen σ_b den Prozentsatz c an, zur Bestimmung von $x = ch_o$, worin

$$c = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_{fe}}{n}}$$

bedeutet bei $n = 15$, und zwar die Kurve a für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² und die Kurve a_r für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm². Der Maßstab der Ordinaten dieser Kurven ist derselbe wie der der Kurven $\frac{M}{b}$, jedoch als Dezimalbruch zu lesen; z. B. die Ordinaten über oder unter $\sigma_b = 40$ kg/cm² der Kurven a resp. a_r sind 0,3333 resp. 0,3750.

Die Ordinaten der in denselben Quadranten für $\frac{M}{b}$ gestrichelten Kurven mit der Bezeichnung h_{or} geben lotrecht über oder unter dem abgelesenen σ_b die Koeffizienten an, mit denen man das h_o für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² zu multiplizieren hat, um dasjenige h_{or} zu erhalten für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² bei gleichbleibenden $\frac{M}{b}$ und σ_b. Der Maßstab dieser Ordinaten ist leicht zu erkennen: z. B. die Ordinate über oder unter $\sigma_b = 40$ kg/cm² der Kurven h_{or} ist 0,951, so sind in der Tafel die zwei ersten Ziffern 0,9 weggelassen und die zwei folgenden 51 in Millimetern aufgetragen.

Die Ordinaten der in den Quadranten für x, resp. F_e gestrichelten Kurven x_r, resp. F_{er} geben lotrecht über resp. unter dem abgelesenen σ_b die Koeffizienten an, mit denen man das x resp. F_e für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² zu multiplizieren hat, um dasjenige x resp. F_e zu erhalten für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² bei gleichbleibendem σ_b. Der Maßstab dieser Ordinaten ist leicht zu erkennen: z. B. ist die Ordinate über $\sigma_b = 40$ kg/cm² für x_r 1,125, so sind in der Tafel die zwei ersten Ziffern 1,1 weggelassen und die zwei folgenden 25 in Millimetern aufgetragen; die Ordinate unter $\sigma_b = 40$ kg/cm² für F_{er} ist 1,350, so sind wiederum die zwei ersten Ziffern weggelassen und die zwei folgenden 50 in Millimetern aufgetragen.

Daß man mit diesen gestrichelten Kurven für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² nicht zu arbeiten braucht, folgt aus den früheren Erörterungen über die allgemeine Gültigkeit der Tafel für jedes beliebige σ_b und σ_{fe}.

Dennoch soll durch ein Rechnungsbeispiel auch dieser Rechnungsgang vorgeführt werden.

Beispiel. (Vgl. Beisp. 4, Tafel I.)	Gegeben sind:	Gesucht werden:
	$M = 3000000$ cm/kg	h_o in cm
	$b = 250$ cm	x in cm
	$d = 16,2$ cm	F_e in cm²
	$\sigma_b = 40$ kg/cm²	
	$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²	

Ohne Veränderung des Wertes $\frac{M}{b}$ und σ_b, wie im Beispiel 4 geschehen ist, entspricht in der Tafel für $\frac{M}{b} = \frac{3000000}{250} = 12000$ bei $\sigma_b = 40$ kg/cm² ein $h_o = 45$ cm, natürlich wenn $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² beträgt. Verlangt ist jedoch

$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm². Man erhält das x_{or} für $\sigma_{fe} = 1000$ bei gleichbleibendem $\frac{M}{b}$ und σ_b, wie oben erwähnt, indem man das h_{or} für $\sigma_{fe} = 1200$ multipliziert mit der Ordinate der Kurve h_{or} über dem abgelesenen σ_b. In diesem Falle ist die Ordinate h_{or} über $\sigma_b = 40$ kg/cm² 0,951, somit das gesuchte $h_{or} = 45 \cdot 0{,}951 = 42{,}8$ cm, wie auch früher in Beispiel 4 gefunden worden ist.

Zu $\sigma_b = 40$ kg/cm² und $h_{or} = 42{,}8$ cm entspricht bei $\sigma_{fe} = 1200$ in der Tafel ein $x = 14{,}26$ cm. Verlangt ist jedoch $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm². Man erhält das x_{or} für $\sigma_{fe} = 1000$ bei gleichbleibendem σ_b, wie oben erwähnt, indem man das x für $\sigma_{fe} = 1200$ multipliziert mit der Ordinate der Kurve x_{or} über dem abgelesenen σ_b. Also in diesem Falle ist die Ordinate x_{or} über $\sigma_b = 40$ kg/cm² 1,125, somit das gesuchte $x_{or} = 14{,}26 \cdot 1{,}125 = 16{,}04$, wie auch früher im Beispiel 4 gefunden worden ist.

Desgleichen entspricht zu $\sigma_b = 40$ kg/cm² bei $\sigma_{fe} = 1200$ für $h_{or} = 42{,}8$ cm ein $F_e = 23{,}8$ cm² bei $b = 100$ cm, also bei $b = 2{,}5 \cdot 100$, $F_e = 2{,}5 \cdot 23{,}8 = 59{,}5$ cm.

Verlangt ist jedoch $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm². Man erhält das F_{er} für $\sigma_{fe} = 1000$ bei gleichbleibendem σ_b, wie oben erwähnt, indem man das F_e für $\sigma_{fe} = 1200$ multipliziert mit der Ordinate der Kurve F_{er} unter dem abgelesenen σ_b. In diesem Falle ist die Ordinate unter $\sigma_b = 40$ kg/cm² 1,35, somit das gesuchte $F_{er} = 59{,}5 \cdot 1{,}35 = 80{,}20$ cm², wie auch früher in Beispiel 4 gefunden worden ist.

Auf die in der Tafel I eingetragenen Bemerkungen, Formeln, sowie Zahlentabellen, die zur Herstellung der Tafel gedient haben, sei noch besonders hingewiesen.

Wer sich mit der Genauigkeit der Ergebnisse aus dieser Tafel I nicht zufrieden gibt und dennoch eine rasche und genauere Kontrolle der Rechnung haben will bei einer beliebigen, aber wirtschaftlichen Ausnutzung der Materialien Eisen und Beton hinsichtlich ihrer Inanspruchnahme auf Zug resp. Druck, der mag die Tafel benutzen, betr. graphische Darstellung der Formeln

$$\frac{M}{bh_o^2} = \frac{1}{\mu^2} \text{ und } \frac{F_e}{bh_o} = f \text{ für } x < d.$$

Tafel II und III.

Graphische Tabellen.

Für: $x \geq d$, $n = \frac{E_f}{E_b} = 15$

σ_b = **beliebig bis 50 kg/cm²**

σ_{fe} = **1200 kg/cm², resp. 1000 kg/cm², resp. beliebig**

h_o = **beliebig bis 130 cm**

$d = ph_o$ **für** $p = 0{,}08$ **bis 0,34.**

Aufgabe 1. Gegeben sind:
- M in cm/kg
- b in cm
- h_o in cm (auch wählbar)
- d in cm $= ph_o$
- $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm²

Gesucht werden:
- σ_b in kg/cm²
- x in cm
- F_e in cm²

Man bildet den Wert $\frac{M}{b}$ und liest denselben am **Rande** (links oder rechts) oberhalb Blattmitte ab, zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Horizontale bis zum Schnitt mit dem Strahl des gegebenen oder nach wirtschaftlichem und ästhetischem Ermessen zu wählenden h_0 für $d = ph_0$, lotet den Schnittpunkt auf die Mittelhorizontale des Blattes und liest dort σ_b in kg/cm² direkt ab. Verlängert man die Lotrechte durch σ_b nach unten bis zum Schnitt mit dem Strahl des gegebenen oder gewählten h_0 für $d = ph_0$, zieht durch den erhaltenen Schnittpunkt eine Horizontale bis zum Rande des Blattes (links oder rechts), so liest man dort den Wert von F_e in cm² für $b = 100$ cm direkt ab. Ist $b = v \cdot 100$ cm, so hat man statt des abgelesenen F_e zu nehmen $v \cdot F_e$.

Daß $x > d$ ist selbstverständlich vorausgesetzt und ist leicht zu prüfen mit Hilfe des Quadranten für x in Tafel I, resp. der Kurven a und a_r oder auch mittels Rechenschieber

$$x = c\,h_0 = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_e}{n}}\,h_0.$$

Aufgabe 2.

Gegeben sind:	Gesucht werden:
M in cm·kg	x in cm
b in cm	σ_b in kg/cm²
h_0 in cm (auch wählbar)	σ_{fe} in kg/cm²
d in cm $= p\,h_0$	
F_e in cm²	

Man bildet den Wert $\frac{F_e}{b}$ (wobei zu beachten ist, aus den oben angegebenen Gründen, daß F_e in cm² und b in **Metern** eingesetzt wird) und liest denselben am **Rande** links oder rechts unterhalb Blattmitte ab, zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Horizontale bis zum Schnitt mit dem Strahl des gegebenen oder zu wählenden h_0 für $d = ph_0$, lotet den Schnittpunkt auf die Mittelhorizontale des Blattes und liest dort σ_b in kg/cm² direkt ab. (Dieses σ_b entspricht natürlich einem $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm².)

Verlängert man die Lotrechte durch σ_b nach oben bis zum Schnitt mit dem Strahl des gegebenen oder gewählten h_0 für $d = ph_0$, zieht durch den erhaltenen Schnittpunkt eine Horizontale bis zum Rande des Blattes (links oder rechts), so liest man dort den Wert $\frac{M}{b}$ direkt ab. (Dieses $\frac{M}{b}$ entspricht natürlich einem $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm².)

Ist das zuletzt abgelesene $\frac{M}{b}$ identisch mit dem gegebenen $\frac{M}{b}$, dann sind die Spannungen identisch mit dem abgelesenen σ_b und dem $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm². Ist das abgelesene $\frac{M}{b}$ verschieden von dem gegebenen $\frac{M}{b}$, dann sind die Spannungen mit Hilfe des Rechenschiebers leicht und hinreichend genau bestimmt, wie folgt. Es verhalten sich nämlich:

$$\frac{\text{Abgelesenes } \frac{M}{b}}{\text{Gegebenen } \frac{M}{b}} = \frac{\text{abgelesenes } \sigma_b}{\text{wirklichen } \sigma_b} = \frac{\sigma_{fe} = 1200 \text{ kg/cm}^2}{\text{wirklichen } \sigma_{fe}}.$$

Hieraus folgt, daß auch diese Tafeln für jedes beliebige σ_{fe}' und σ_b zu gebrauchen sind, und ist das unter a und b für Tafel I Gesagte auch hier anwendbar, nur daß hier die Werte $\frac{M}{b}$ oberhalb Blattmitte und die Werte F_e für $b = 100$ cm unterhalb Blattmitte für das h_0 mit $d = p\,h_0$ abzulesen sind.

Vorstehende Erörterungen mögen noch durch einige Rechnungsbeispiele ergänzt werden. Der Rechnungsvorgang ist genau wie früher beschrieben (siehe Aufgabe 1 resp. Aufgabe 2). und sind die entsprechenden Linienzüge an Hand der Millimeternetzlinien der Tafel leicht zu verfolgen. Hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit der Querschnittsdimensionierung mit Hilfe dieser Tafeln ist dasselbe zu sagen wie für Tafel I, und ist alles weitere den Tafeln direkt zu entnehmen.

Beispiel 1. (Vgl. Aufgabe 1.)

Gegeben sind:	Gesucht werden:
$M = 3240000$ cm/kg	σ_b in kg/cm²
$b = 250$ cm	x in cm
$h_0 = 48$ cm	F_e in cm²
$d = 12$ cm $= 0{,}25\,h_0$	
$\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm²	

$\frac{M}{b} = \frac{3240000}{250} = 12960$. Hierzu entspricht bei $d = 0{,}25\,h_0$ und für $h_0 = 48$ cm ein Wert von $\sigma_b = 40$ kg/cm². Zu diesem Werte von $\sigma_b = 40$ kg/cm² entspricht bei $d = 0{,}25\,h_0$ und für $h_0 = 48$ cm ein Wert von $F_e = 25$ cm² für $b = 100$ cm.

Da $b = 2{,}5 \cdot 100$, so ist das erforderliche $F_e = 25 \cdot 2{,}5 = 62{,}5$ cm².

Mit Hilfe der Tafel I ist im Quadranten für x bei $\sigma_b = 40$ und $h_0 = 48$, $x = 16$ cm abzulesen, somit $x > d$, wie vorausgesetzt.

Zusammenstellung des Rechnungsvorganges:

$$M = 3240000 \text{ cm/kg} \qquad \frac{M}{b} = 12960$$
$$b = 250 \text{ cm}$$

$$h_0 = 45 \text{ cm} \quad d = 0{,}25\,h_0, \quad \sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{fe} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$
$$d = 12 \text{ cm} \quad x = 16 \text{ cm} > d, \quad F_e = 25 \cdot 2{,}5 = 62{,}5 \text{ cm}^2.$$

Was unter Beispiel 1 für Tafel I gesagt worden, ist auch hier in ähnlicher Weise zu sagen und wird hierauf verwiesen.

Das vorgeführte Beispiel sei auch hier nach den preußischen Ministerialbestimmungen geprüft, um die vollkommene Übereinstimmung der Ergebnisse nachzuweisen.

Gegeben: $M = 3240000$ cm/kg, $b = 250$ cm, $h_0 = 48$ cm
$d = 12$ cm, $F_e = 62{,}5$ cm², $n = 15$.

Gesucht: x, σ_b und σ_{fe}

$$x = \frac{2n\,h_0\,F_e + b\,d^2}{2\,(n\,F_e + b\,d)} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 48 \cdot 62{,}5 + 250 \cdot 12^2}{2\,(15 \cdot 62{,}5 + 250 \cdot 12)} = \mathbf{16\ cm}$$

$$a = \frac{d}{3} \cdot \frac{3x - 2d}{2x - d} = \frac{12}{3} \cdot \frac{3 \cdot 16 - 2 \cdot 12}{2 \cdot 16 - 12} = 4{,}8 \text{ cm}$$

$$y = h_0 - a = 48 - 4{,}8 = 43{,}2 \text{ cm}$$

$$\sigma_{fe} = \frac{M}{F_e \cdot y} = \frac{3240000}{62{,}5 \cdot 43{,}2} = \mathbf{1200\ kg/cm^2}$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{fe}\,x}{n\,(h_0 - x)} = \frac{1200 \cdot 16}{15\,(48 - 16)} = \mathbf{40\ kg/cm^2}.$$

Beispiel 2. (Vgl. Aufgabe 2.)

Gegeben sind:
$M = 3\,240\,000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$h_0 = 48$ cm
$d = 12$ cm $= 0{,}25\,h_0$
$F_e = 75{,}3$ cm²

Gesucht werden:
x in cm
σ_b in kg/cm²
σ_{fe} in kg/cm²

$\frac{F_e}{b} = \frac{75{,}3}{2{,}5} = 30{,}12$. Hierzu entspricht bei $d = 0{,}25\,h_0$ und für $h_0 = 48$ cm ein Wert von $\sigma_q = 45{,}8$ kg/cm². Zu diesem Werte von $\sigma_b = 45{,}8$ kg/cm² entspricht bei $d = 0{,}25\,h_0$ und für $h_0 = 48$ cm ein Wert $\frac{M}{b} = 15\,552$. Mit Hilfe der Tafel I ist im Quadranten für x bei $\sigma_b = 45{,}8$ kg/cm² und $h_0 = 48$ cm, $x = 17{,}5$ cm abzulesen, somit $x > d$, wie vorausgesetzt.

Da das gegebene $\frac{M}{b} = \frac{3\,240\,000}{250} = 12\,960$ beträgt, so sind die gesuchten Spannungen leicht zu bestimmen, wie früher angegeben.

Es verhalten sich:

$$\frac{\text{Abgelesenes } \frac{M}{b}}{\text{Gegebenen } \frac{M}{b}} = \frac{\text{abgelesenes } \sigma_b}{\text{wirklichen } \sigma_b} = \frac{\sigma_{fe} = 1200 \text{ kg/cm}^2}{\text{wirklichen } \sigma_{fe}}$$

Somit $\frac{15\,552}{12\,960} = \frac{45{,}80}{38{,}16} = \frac{1200}{1000}$.

Zusammenstellung des Rechnungsvorganges:

$M = 3\,240\,000$ cm/kg $\quad \frac{M}{b} = 12\,960$
$b = 250$ cm

$$\frac{F_e}{b} = 30{,}12,\ h_0 = 48 \text{ cm},\ d = 0{,}25\,h_0,\ \sigma_b = 45{,}8 \text{ kg/cm}^2$$

$$d = 12 \text{ cm},\ x = 17{,}5 \text{ cm} > d;\ \frac{M}{b} = 15\,552$$

$$\frac{15\,552}{12\,960} = \frac{45{,}8}{38{,}16} = \frac{1200}{1000}$$

Somit sind die wirklichen Spannungen:

$$\sigma_b = 38{,}16 \text{ kg/cm}^2$$
$$\sigma_{fe} = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 3. (Vgl. Anmerkg. a für Tafel I.)

Gegeben sind:
$M = 2\,700\,000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$h_0 = 48$ cm
$d = 12$ cm $= 0{,}25\,h_0$
$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²

Gesucht werden:
σ_b in kg/cm²
x in cm
F_e in cm²

$$\left(\frac{M}{b}\right)' = \frac{M}{b} \cdot \frac{1200}{1000} = \frac{2\,700\,000}{250} \cdot \frac{1200}{1000} = 12\,960.$$

Zu $\left(\frac{M}{b}\right)' = 12\,960$ hatten wir im Beispiel 1 bei $d = 0{,}25\,h_0$ und für $h_0 = 48$ cm, $\sigma_b = 40$ kg/cm², $x = 16$ cm $> d$ und $F_e = 62{,}5$ cm².

Da das gegebene $\frac{M}{b} = 10800$ beträgt, so ist das wirkliche σ_b zu bestimmen, wie früher angegeben.

Es verhalten sich:

$$\frac{\text{Abgelesenes } \frac{M}{b}}{\text{Gegebenen } \frac{M}{b}} = \frac{\text{abgelesenes } \sigma_b}{\text{wirklichen } \sigma_b} = \frac{\sigma_{fe} = 1200 \text{ kg/cm}^2}{\text{wirklichen } \sigma_{fe}}$$

Somit $\frac{12960}{10800} = \frac{40}{33{,}33} = \frac{1200}{1000}$

Zusammenstellung des Rechnungsvorganges:

$$M = 2700000 \text{ cm/kg} \quad b = 250 \text{ cm} \quad \frac{M}{b} = 10800, \; \sigma_{fe} = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\left(\frac{M}{b}\right)' = 12960, \; (\sigma_b)' = 40 \text{ kg/cm}^2$$

$$d = 12 \text{ cm}, \; x = 16 \text{ cm} > d, \; F_e = 62{,}5 \text{ cm}^2$$

$$\frac{12960}{10800} = \frac{40}{33{,}33} = \frac{1200}{1000}$$

Somit ist die wirkliche Spannung:

$$\sigma_b = 33{,}33 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 4. (Vgl. Anmerkg. b für Tafel II.)

Gegeben sind:	Gesucht werden:
$M = 3240000$ cm/kg	h_o in cm
$b = 250$ cm	x in cm
$d = 0{,}25\, h_o$	F_e in cm²
$\sigma_b = 40$ kg/cm²	
$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²	

$$\left(\frac{M}{b}\right)' = \frac{M}{b}\frac{1200}{1000} = 15552; \; (\sigma_b') = \sigma_b \frac{1200}{1000} = 40 \cdot 1{,}2 = 48 \text{ kg/cm}^2.$$

Zu $(\sigma_b)' = 48$ kg/cm² und $\left(\frac{M}{b}\right)' = 15552$ entspricht bei $d = 0{,}25\, h_o$ ein $h_o = 46{,}6$ cm und damit $d = 0{,}25\, h_o = 11{,}65$ cm. Zu diesem $h_o = 46{,}6$ cm entspricht bei $d = 0{,}25\, h_o$ unter $\sigma_b = 48$ kg/cm² ein Wert von $F_e = 31$ cm² für $b = 100$ cm; da $b = 2{,}5 \cdot 100$, so ist das erforderliche $F_e = 31 \cdot 2{,}5 = 77{,}5$ cm².

Mit Hilfe der Tafel I ist im Quadranten für x bei $\sigma_b = 48$ kg/cm² und $h_o = 46{,}6$ cm $x = 17{,}5$ cm abzulesen, somit $x > d$, wie vorausgesetzt.

Zusammenstellung des Rechnungsvorganges:

$$M = 3240000 \text{ cm/kg} \quad b = 250 \text{ cm} \quad \frac{M}{b} = 12960, \; \sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{fe} = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\left(\frac{M}{b}\right)' = 15552, \; (\sigma_b)' = 48 \text{ kg/cm}^2$$

$$h_o = 46{,}6 \text{ cm}, \; d = 0{,}25\, h_o = 11{,}65 \text{ cm}$$

$$x = 17{,}5 \text{ cm} > d, \quad F_e = 77{,}5 \text{ cm}^2.$$

Diese vier Beispiele dürften auch hier genügen, um auch anders gestellte Aufgaben mit Hilfe der Tafeln II, resp. III ähnlich, wie vorgeführt, zu lösen, und zwar für jedes beliebige σ_b und σ_{fe}.

Bemerkungen zu Tafel II, resp. III.

Die Ordinaten der oberhalb, resp. unterhalb Blattmitte gestrichelten Kurven mit den Bezeichnungen h_{or}, resp. F_{er} geben lotrecht über, resp. unter dem abgelesenen σ_b die Koeffizienten an, mit denen man das h_o, resp. F_e

für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² zu multiplizieren hat, um dasjenige h_{or}, resp. F_{er} zu erhalten für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm bei gleichbleibendem $\frac{M}{b}$ und σ_b. Der Maßstab der Ordinaten h_{or} ist leicht zu erkennen. Auf Tafel II ist dieser Maßstab doppelt so groß als der der Werte $\frac{M}{b}$; auf Tafel III ist dieser Maßstab ebenso groß als der der Werte $\frac{M}{b}$. In beiden Fällen ist dieser Wert als Dezimalbruch zu lesen. Z. B. auf Talel II ist die Ordinate h_{or} über $\sigma_b = 30$ kg/cm² bei $d = 0{,}08\,h_o$, 0,990 (entspricht der Ordinate $\frac{M}{b} = 49500$, also in doppeltem Maßstabe ergibt 99000 und als Dezimalbruch gelesen 0,990); auf Tafel III ist die Ordinate h_{or} über $\sigma_b = 30$ kg/cm² bei $d = 0{,}22\,h_o$, 0,964 (entspricht der Ordinate $\frac{M}{b} = 96400$, also im nämlichen Maßstab und als Dezimalbruch gelesen ergibt 0,964).

Der Maßstab der Ordinaten F_{er} ist ebenfalls leicht zu erkennen, und zwar ist dieser auf beiden Tafeln der nämliche. Z. B. auf Tafel II ist die Ordinate F_{er} unter $\sigma_b = 30$ kg/cm² bei $d = 0{,}08\,h_o$, 1,226 aufgetragen in Millimetern als 122,6; auf Tafel III ist die Ordinate F_{er} unter $\sigma_b = 30$ kg/cm² bei $d = 0{,}22\,h_o$, 1,298 aufgetragen in Millimetern als 129,8.

Daß man mit den gestrichelten Kurven für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² nicht zu arbeiten braucht, folgt aus den früheren Erörterungen über die allgemeine Gültigkeit der Tafeln für jedes beliebige σ_b und σ_{fe}.

Dennoch soll durch ein Rechnungsbeispiel auch dieser Rechnungsgang vorgeführt werden.

Beispiel. (Vgl. Beisp. 4, Tafel III.)	Gegeben sind:	Gesucht werden:
	$M = 3240000$ cm kg	h_o in cm
	$b = 250$ cm	x in cm
	$d = 0{,}25\,h_o$	F_e in cm²
	$\sigma_b = 40$ kg/cm²	
	$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²	

Ohne Veränderung des Wertes $\frac{M}{b}$ und σ_b, wie im Beispiel 4 geschehen ist, entspricht in der Tafel III bei $d = 0{,}25\,h_o$ für $\frac{M}{b} = 12960$ bei $\sigma_b = 40$ kg cm² ein $h_o = 48$ cm, natürlich wenn $\sigma_{fe} = 1200$ kg cm² beträgt. Verlangt ist jedoch $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm². Man erhält das h_{or} für $\sigma_{fe} = 1000$ bei gleichbleibendem $\frac{M}{b}$ und σ_b, wie oben erwähnt, indem man das h_o für $\sigma_{fe} = 1200$ multipliziert mit der Ordinate der Kurve h_{or} über dem abgelesenen σ_b.

In diesem Falle ist die Ordinate h_{or} über $\sigma_b = 40$ kg/cm², 0,971, somit das gesuchte $h_{or} = 48 \cdot 0{,}971 = 46{,}6$ cm, wie auch früher im Beispiel 4 gefunden worden ist. Damit $d = 0{,}25\,h_o = 11{,}65$ cm.

Zu $\sigma_b = 40$ kg cm² und $h_{or} = 46{,}6$ cm entspricht in der Tafel III bei $d = 0{,}25\,h_o$ ein $F_e = 24{,}25$ cm² für $b = 100$ cm, also bei $b = 2{,}5 \cdot 100$, $F_e = 24{,}25 \cdot 2{,}5 = 60{,}62$ cm², natürlich wenn $\sigma_{fe} = 1200$ kg cm² beträgt. Verlangt ist jedoch $\sigma_{fe} = 1000$ kg cm². Man erhält das F_{er} für $\sigma_{fe} = 1000$ bei gleichbleibendem σ_b, wie oben erwähnt, indem man das F_e für $\sigma_{fe} = 1200$ multipliziert mit der Ordinate der Kurve F_{er} unter dem abgelesenen σ_b. In diesem Falle ist die Ordinate F_{er} unter $\sigma_b = 40$ kg cm², 1,278, somit das

gesuchte $F_{er} = 60{,}62 \cdot 1{,}278 = 77{,}5$ cm², wie auch früher im Beispiel 4 gefunden worden ist.

Zur Bestimmung von x bediene man sich der Tafel I, und zwar entweder der Kurve a_r im Quadranten für $\frac{M}{b}$ oder der Kurve x_r im Quadranten für x (siehe Bemerkungen zu Tafel I), oder auch des Rechenschiebers, da der Wert

$$c = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_{fe}}{n}}$$

ebenso schnell gerechnet als abgelesen ist, und damit $x = ch_o$. In diesem Falle

$$x = \frac{40}{40 + \frac{1000}{15}} \cdot 46{,}6 = 0{,}375 \cdot 46{,}6 = 17{,}5 \text{ cm},$$

wie auch früher gefunden.

Auf die in den Tafeln II und III eingetragenen Bemerkungen und Formeln, die zur Herstellung der Tafeln gedient haben, sei noch besonders hingewiesen.

Wer sich mit der Genauigkeit der Ergebnisse aus diesen Tafeln II und III nicht zufrieden gibt und dennoch eine rasche und genauere Kontrolle der Rechnung haben will bei einer beliebigen, aber wirtschaftlichen Ausnutzung der Materialien Eisen und Beton hinsichtlich ihrer Inanspruchnahme auf Zug, resp. Druck, der mag die Tafel IV oder Tafel V benutzen, betr. graphische Darstellung der Formeln

$$\frac{M}{bh_o^2} = (\sigma_b - y_m)\, z_m \quad \text{und} \quad \frac{F_e}{bh_o} = (\sigma_b - y_f)\, z_f$$

$$\text{oder} \quad \frac{M}{bh_o^2} = \frac{1}{\mu^2} \quad \text{und} \quad \frac{F_e}{bh_o} = f$$

für $x \geq d$, bei $d = ph_o$, wobei p beliebig.

Tafel IV.

A) Unterhalb Blattmitte.

Graphisch dargestellte Formeln.

Für: $x \leq d$, $n = \frac{E_{fe}}{E_b} = 15$

σ_b = beliebig bis 48 kg/cm²

σ_{fe} = 1200 kg/cm², resp. 1000 kg/cm², resp. beliebig

$$\frac{M}{bh_o^2} = \frac{1}{\mu^2} \text{ und } \frac{F_e}{bh_o} = f$$

Aufgabe 1. Gegeben sind:
M in cm/kg
b in cm
h_o in cm
d in cm
σ_{fe} = 1200 kg/cm²
resp. 1000 kg/cm²

Gesucht werden:
σ_b in kg/cm²
x in cm
F_e in cm²

Man bildet den Wert $\frac{M}{b h_0^2}$ und liest denselben am Rande links (Quadrant III unterhalb Blattmitte) ab, zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Horizontale bis zum Schnitt mit einer der Kurven „$\frac{1}{\mu^2}$“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², lotet den Schnittpunkt auf die Mittelhorizontale des Blattes und liest dort σ_b in kg/cm² direkt ab. Verlängert man die Lotrechte durch σ_b nach unten bis zum Schnitt mit einer der Kurven „c“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² resp. für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², zieht durch diesen Schnittpunkt eine Horizontale bis zur Mittelvertikale des Blattes, so liest man dort den Prozentsatz „c“ direkt ab zur Bestimmung von $x = c h_0$. Geht man mit dem früher abgelesenen σ_b im Quadranten IV und zieht durch diesen Punkt auf der Mittelhorizontalen des Blattes eine Lotrechte nach unten bis zum Schnitt mit einer der Kurven „f“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², zieht durch diesen Schnittpunkt eine Horizontale bis zum äußersten Rande rechts, so liest man dort den Prozentsatz „f“ für $b = 100$ cm direkt ab, zur Bestimmung von $F_e = f \cdot b \cdot h_0$, wobei zu beachten ist, daß b in m, h_0 in cm zu setzen ist, und F_e ergibt sich alsdann in cm².

Aufgabe 2.

Gegeben sind:	Gesucht werden:
M in cm/kg	x in cm
b in cm	σ_b in kg/cm²
h_0 in cm	σ_{fe} in kg/cm²
d in cm	
F_e in cm²	

Man bildet den Wert $\frac{F_e}{b h_0}$ (F_e in cm², b in m, h_0 in cm) und liest denselben am Rande rechts (Quadrant IV unterhalb Blattmitte) ab, zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Horizontale bis zum Schnitt mit einer der Kurven „f“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² resp. für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², lotet den Schnittpunkt auf die Mittelhorizontale des Blattes und liest dort σ_b in kg/cm² direkt ab. (Dieses σ_b entspricht natürlich einem $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. einem $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² je nach der Kurve, mit der man arbeitet.)

Geht man mit dem abgelesenen σ_b im Quadranten III und zieht durch diesen Punkt auf der Mittelhorizontalen des Blattes eine Lotrechte nach unten bis zum Schnitt mit einer der Kurven „$\frac{1}{\mu^2}$“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², zieht durch diesen Schnittpunkt eine Horizontale bis zum äußersten Rande links, so liest man dort den Wert $\frac{M}{b h_0^2}$ direkt ab. (Dieses $\frac{M}{b h_0^2}$ entspricht natürlich einem $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. einem $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², je nach der Kurve mit der man arbeitet.)

Die Bestimmung von $x = c h_0$ erfolgt mit Hilfe der Kurven „c“, wie in Aufgabe 1 beschrieben. Ist das $x > d$, dann ist Gebrauch zu machen von den Formeln für $x > d$.

Ist das abgelesene $\frac{M}{b h_0^2}$ identisch mit dem gegebenen $\frac{M}{b h_0^2}$, dann sind die Spannungen identisch mit dem abgelesenen σ_b für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. σ_b für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm². Ist das abgelesene $\frac{M}{b h_0^2}$ verschieden von dem gegebenen $\frac{M}{b h_0^2}$, dann sind die Spannungen mit Hilfe des Rechenschiebers

leicht und hinreichend genau bestimmt wie folgt. Es verhalten sich nämlich:

$$\frac{\text{Abgelesenes } \dfrac{M}{bh_o^2}}{\text{Gegebenen } \dfrac{M}{bh_o^2}} = \frac{\text{abgelesenen } \sigma_b}{\text{wirklichen } \sigma_b} = \frac{\sigma_{fe} = 1200 \text{ resp. } 1000}{\text{wirklichen } \sigma_{fe}}$$

Hieraus folgt, daß die Kurven für jedes beliebige σ_{fe}' und σ_b zu gebrauchen sind, und ist das unter *a* und *b* früher Gesagte auch hier anwendbar.

a) Will man, statt $\sigma_{fe} = 1200$, resp. 1000 ein beliebiges σ_{fe}' ausnutzen, so hat man statt des wirklichen $\frac{M}{bh_o^2}$ zu nehmen $\frac{M}{bh_o^2}\,\frac{1200}{\sigma_{fe}'}$, resp. $\frac{M}{bh_o^2}\,\frac{1000}{\sigma_{fe}'}$, bezeichnet diesen Wert mit $\left(\frac{M}{bh_o^2}\right)'$ und verfährt genau, wie unter Aufgabe 1 erörtert wurde.

Die Werte von „*c*", resp. „*f*" bleiben natürlich genau, so wie sie abgelesen wurden. Das abgelesene σ_b ist jedoch nicht das zur Spannung σ_{fe}' entsprechende, sondern man erhält zum Schluß der Aufgabe das wirkliche σ_b, indem man mit Hilfe des Rechenschiebers den Wert rechnet: abgelesenes $\sigma_b \cdot \frac{\sigma_{fe}'}{1200}$ resp. abgelesenes $\sigma_b \cdot \frac{\sigma_{fe}'}{1000}$, je nachdem man mit den Kurven für $\sigma_{fe} = 1200$, resp. für $\sigma_{fe} = 1000$ gearbeitet hat.

b) Will man die beliebigen Spannungen σ_b und σ_{fe}' ausnutzen, so hat man statt des wirklichen σ_b zu nehmen $\sigma_b\,\frac{1200}{\sigma_{fe}'}$, resp. $\sigma_b\,\frac{1000}{\sigma_{fe}'}$, bezeichnet diesen Wert mit $(\sigma_b)'$ und verfährt umgekehrt, wie in Aufgabe 1 zur Bestimmung des zugeordneten $\left(\frac{M}{bh_o^2}\right)'$; dieser Wert entspricht dem wirklichen Werte $\frac{M}{bh_o^2}$ mal $\frac{1200}{\sigma_{fe}'}$, resp. $\frac{M}{bh_o^2}$ mal $\frac{1000}{\sigma_{fe}'}$, woraus das wirkliche $\frac{M}{bh_o^2}$ und mithin das erforderliche h_o zu bestimmen ist.

Die Werte von „*c*", resp. „*f*" für das $(\sigma_b)'$ bleiben natürlich genau so, wie sie abgelesen wurden.

Vorstehende Erörterungen mögen noch durch dieselben vier Rechnungs-Beispiele wie für Tafel I ergänzt werden. Der Rechnungsvorgang ist genau, wie früher beschrieben (siehe Aufgabe 1, resp. Aufgabe 2), und sind die entsprechenden Linienzüge an Hand der Millimeternetzlinien der Tafel leicht zu verfolgen.

Beispiel 1. (Vgl. Aufgabe 1.)

Gegeben sind:	Gesucht werden:
$M = 3000000$ cm/kg.	σ_b in kg/cm²
$b = 250$ cm	x in cm
$h_o = 45$ cm	F_e in cm²
$d = 15$ cm	
$\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm²	

$\frac{M}{bh_o^2} = \frac{1}{\mu^2} = 5{,}91$. Hierzu entspricht bei der Kurve $\frac{1}{\mu^2}$ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² ein $\sigma_b = 40$ kg/cm², zu diesem ein $c = 0{,}333$, somit $x = 0{,}333 \cdot 45 = 15$ cm. Zu $\sigma_b = 40$ kg/cm² entspricht bei der Kurve „*f*" für $\sigma_{fe} = 1200$ kg cm² ein $f = 0{,}555$ für $b = 100$ cm. Somit $F_e = 0{,}555 \cdot 2{,}5 \cdot 45 = 62{,}5$ cm².

Beispiel 2. (Vgl. Aufgabe 2)

Gegeben sind:
$M = 3000000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$h_0 = 45$ cm
$d = 16,2$ cm
$Fe = 76,0$ cm²

Gesucht werden:
x in cm
σ_b in kg/cm²
σ_{fe} in kg/cm²

$\frac{F_e}{bh_0} = f = 0,675$. Hierzu entspricht bei der Kurve „f“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² ein $\sigma_b = 45$ kg/cm². Zu diesem $\sigma_b = 45$ kg/cm² entspricht bei der Kurve „c“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² ein $c = 0,36$ somit $x = 0,36 \cdot 45 = 16,2$ cm, und bei der Kurve „$\frac{1}{\mu^2}$“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² ein $\frac{M}{bh_0^2} = 7,13$. Da das gegebene $\frac{M}{bh_0^2} = 5,91$ beträgt, so sind die gesuchten Spannungen leicht zu bestimmen, wie früher angegeben. Es verhalten sich:

$$\frac{7,13}{5,91} = \frac{45}{37,5} = \frac{1200}{1000},$$

somit sind die wirklichen Spannungen:

$$\sigma_b = 37,5 \text{ kg/cm}^2$$
$$\sigma_{fe} = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Daß man in diesem Falle dieselben Resultate mit Hilfe der Kurven für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² erhält, ist selbstverständlich, und kann die Prüfung an Hand der Kurven leicht vorgenommen werden.

Beispiel 3. (Vgl. Anmerkg. a.)

Gegeben sind:
$M = 2500000$
$b = 250$ cm
$h_0 = 45$ cm
$d = 15$ cm
$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²

Gesucht werden:
σ_b in kg/cm²
x in cm
F_e in cm²

Diese Aufgabe kann ebenso wie Aufgabe 1 direkt gelöst werden mit Hilfe der Kurven „$\frac{1}{\mu^2}$“ „c“ „f“ für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm². Es sollen jedoch hier die Kurven „$\frac{1}{\mu^2}$“ „c“ und „f“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² benutzt werden.

$$\left(\frac{M}{bh_0^2}\right)' = \frac{M}{bh_0^2} \cdot \frac{1200}{1000} = 5,91.$$

Zu $\left(\frac{M}{bh_0^2}\right)' = 5,91$ hatten wir im Beispiel 1

$$\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2, \; x = 15 \text{ cm}$$

und $F_e = 62,5$ cm². Da das gegebene $\frac{M}{bh_0^2} = 4,94$ beträgt, so ist das wirkliche σ_b zu bestimmen, wie früher angegeben.

Es verhalten sich :

$$\frac{\text{Abgelesenes } \frac{M}{bh_0^2}}{\text{Wirklichen } \frac{M}{bh_0^2}} = \frac{\text{abgelesenes } \sigma_b}{\text{wirklichen } \sigma_b} = \frac{\sigma_{fe} = 1200}{\text{wirklichen } \sigma_{fe}}$$

$$\text{Somit } \frac{5,91}{4,94} = \frac{40}{33,33} = \frac{1200}{1000}$$

Somit ist die wirkliche Spannung

$$\sigma_b = 33,33 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 4. (Vgl. Anmerkg. b.)

Gegeben sind:

$M = 3000000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$d = 16,2$ cm
$\sigma_b = 40$ kg/cm²
$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²

Gesucht werden:

h_o in cm
x in cm
F_e in cm²

Daß man diese Aufgabe mit Hilfe der Kurven für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² direkt lösen kann, ist selbstverständlich. Es entspricht zu $\sigma_b = 40$ kg/cm² bei $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² ein $\frac{M}{bh_o^2} = 6,56$, woraus $h_o = 42,8$ cm.

Es sollen jedoch die Kurven für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² benutzt werden.

$$(\sigma_b)' = \sigma_b \frac{1200}{1000} = 40 \frac{1200}{100} = 48 \text{kg/cm}^2.$$

Zu $(\sigma_b)' = 48$ kg/cm² entspricht bei $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² ein $\left(\frac{M}{bh_o^2}\right)' = 7,875$.

$$7,875 = \frac{M}{bh_o^2} \cdot \frac{1200}{1000}$$

somit das wirkliche $\frac{M}{bh_o^2} = 7,875 \frac{1000}{1200} = 6,56$.

Zu $\sigma_b = 48$ kg/cm² bei $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² entspricht ein $c = 0,375$, somit $x = 0,375 \cdot 42,8 = 16,04$ cm und ein $f = 0,75$, somit $F_e = 0,75 \cdot 2,5 \cdot 42,8 = 80,2$ cm².

Anders gestellte Aufgaben, als die hier vorgeführten, sind in ähnlicher Weise mit Hilfe der Kurven leicht zu lösen.

Bemerkungen.

Die im Quadranten IV aufgezeichneten Kurven „σ_b“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² sind nichts anderes als die Umkehrung der Kurven „c“ im Quadranten III. Bei den Kurven „c“ sind die Abszissen die Werte von σ_b, während bei den Kurven „σ_b“ sind die Abszissen die Werte von c direkt abzulesen.

Für ein gegebenes σ_b bei gegebenem σ_{fe} ist damit das Minimum von $d = ch_o = x$ gegeben, sofern es nicht wirtschaftlicher erscheint, $d < x$ zu belassen und von den Kurven für $x > d$ Gebrauch zu machen.

B) Oberhalb Blattmitte:

Graphisch dargestellte Formeln.

Für: $x > d$, $n = \frac{E_f}{E_b} = 15$

$d = ph_o$, wobei „p“ beliebig

σ_b = beliebig

σ_{fe} = 1200 kg/cm², resp. 1000 kg/cm², resp. beliebig

$$\frac{M}{bh_o^2} = (\sigma_b - y_m)\, z_m \quad \text{und} \quad \frac{F_e}{bh_o} = (\sigma_b - y_f)\, z_f$$

Aufgabe 1.

Gegeben sind:

M in cm kg
b in cm
h_o in cm
d in cm $= ph_o$
$\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm²
resp. 1000 kg/cm²

Gesucht werden:

σ_b in kg/cm²
x in cm
F_e in cm²

Man bildet den Wert $\frac{M}{b h_o^2}$, setzt diesen Wert $\frac{M}{b h_o^2} = (\sigma_b - y_m) z_m$, wobei die Werte y_m und z_m als Ordinaten im Quadrant I über dem auf der Mittelhorizontale abzulesenden „p“ entsprechend abzulesen sind, für die Kurven bei $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. bei $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm².

Die Kurven y_m sind für $\sigma_{fe} = 1200$ und $\sigma_{fe} = 1000$ verschieden; die Kurve z_m ist für jedes beliebige σ_{fe} ein und dieselbe. Die Werte für die Ordinaten y_m sind auf der Mittelvertikalen, für die Ordinaten z_m am Rande links abzulesen.

Man rechnet aus obiger Gleichung den Wert von

$$\sigma_b = \frac{M}{b h_o^2 z_m} + y_m$$

und bildet

$$\frac{F_e}{b h_o} = (\sigma_b - y_f) z_f,$$

wobei σ_b der soeben gerechnete Wert bedeutet, während y_f und z_f als Ordinaten im Quadranten II über dem auf der Mittelhorizontale abzulesenden „p“ entsprechend abzulesen sind, für die Kurven bei $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. bei $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², je nach der Kurve, mit der man arbeitet.

Die Kurven y_f und z_f sind für $\sigma_{fe} = 1200$ und $\sigma_{fe} = 1000$ verschieden. Die Werte für die Ordinaten y_f sind auf der Mittelvertikalen, für die Ordinaten z_f am Rande rechts abzulesen. Zu beachten ist, daß auch hier bei der Bestimmung von F_e in cm², b in Metern zu setzen ist, h_o in cm, σ_b in kg/cm². Die Ermittlung von x kann mit Hilfe des gerechneten σ_b und der Kurven c oder mit Hilfe der Tafel I oder mit dem Rechenschieber als

$$x = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_{fe}}{n}} h_o$$

erfolgen. Daß $x > d$, ist selbstverständlich vorausgesetzt.

Aufgabe 2. Gegeben sind:

- M in cm kg
- b in cm
- h_o in cm
- d in cm $= p h_o$
- F_e in cm².

Gesucht werden:

- x in cm
- σ_b in kg/cm²
- σ_{fe} in kg/cm²

Man bildet den Wert $\frac{F_e}{b h_o}$ (wobei zu beachten, wie bereits erwähnt, daß F_e in cm², b in m, h_o in cm eingesetzt werden), setzt diesen Wert

$$\frac{F_e}{b h_o} = (\sigma_b - y_f) z_f,$$

wobei die Werte y_f und z_f als Ordinaten im Quadranten II über dem auf der Mittelhorizontalen abzulesenden „p“ entsprechend abzulesen sind, für die Kurven bei $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. bei $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², wie in Aufgabe 1 angegeben.

Man rechnet aus obiger Gleichung den Wert von

$$\sigma_b = \frac{F_e}{b h_o z_f} + y_f$$

und bildet

$$\frac{M}{b h_o^2} = (\sigma_b - y_m) z_m,$$

wobei σ_b den soeben gerechneten Wert bedeutet, während y_m und z_m als Ordinaten im Quadranten I über dem auf der Mittelhorizontalen abzulesenden „p“ entsprechend abzulesen sind, für die Kurven bei $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. bei $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², je nach der Kurve, mit der man arbeitet.

Ist dieser gerechnete Wert $\frac{M}{b\,h_o^2}$ identisch mit dem gegebenen $\frac{M}{b\,h_o^2}$, dann sind die Spannungen identisch mit dem gerechneten σ_b für $\sigma_{fe} = 1200$, resp. dem gerechneten σ_b für $\sigma_{fe} = 1000$, je nach der Kurve, mit der man arbeitet.

Ist das gerechnete $\frac{M}{b\,h_o^2}$ verschieden von dem gegebenen $\frac{M}{b\,h_o^2}$, dann sind die Spannungen mit Hilfe des Rechenschiebers leicht und hinreichend genau bestimmt, wie folgt.

Es verhalten sich nämlich:

$$\frac{\text{Gerechnetes } \frac{M}{b\,h_o^2}}{\text{Gegebenen } \frac{M}{b\,h_o^2}} = \frac{\text{gerechnetes } \sigma_b}{\text{wirklichen } \sigma_b} = \frac{\sigma_{fe} = 1200, \text{ resp. } 1000}{\text{wirklichen } \sigma_{fe}}.$$

Hieraus folgt, daß die Kurven y_m, z_m, y_f, z_f für jedes beliebige σ_{fe}' und σ_b zu gebrauchen sind, und ist das unter a und b früher Gesagte auch hier anwendbar.

a) Will man statt $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. 1000 kg/cm², ein beliebiges σ_{fe}' ausnutzen, so hat man statt $\frac{M}{b\,h_o^2}$ zu nehmen $\frac{M}{b\,h_o^2} \cdot \frac{1200}{\sigma_{fe}'}$, resp. $\frac{M}{b\,h_o^2} \cdot \frac{1000}{\sigma_{fe}'}$ bezeichnet diesen Wert mit $\left(\frac{M}{b\,h_o^2}\right)'$ und verfährt genau, wie unter Aufgabe 1 erörtert wurde.

Das wirkliche σ_b erhält man zum Schluß der Aufgabe mit Hilfe des Rechenschiebers, indem man den Wert rechnet:

$$\text{Gerechnetes } \sigma_b \cdot \frac{\sigma_{fe}'}{1200}, \quad \text{resp.}$$

$$\text{Gerechnetes } \sigma_b \cdot \frac{\sigma_{fe}'}{1000},$$

je nachdem man mit den Kurven für $\sigma_{fe} = 1200$, resp. für $\sigma_{fe} = 1000$ gearbeitet hat.

b) Will man die beliebigen Spannungen σ_b und σ_{fe}' ausnutzen, so hat man statt des wirklichen σ_b zu nehmen $\sigma_b \frac{1200}{\sigma_{fe}'}$, resp. $\sigma_b \frac{1000}{\sigma_{fe}'}$, bezeichnet diesen Wert mit $(\sigma_b)'$ und verfährt umgekehrt wie in Aufgabe 1, d. h. man rechnet hier den Wert

$$\left(\frac{M}{b\,h_o^2}\right)' = ([\sigma_b]' - y_m)\,z_m,$$

wobei y_m und z_m über das angenommene „p“ abzulesen sind.

Dieser Wert $\left(\frac{M}{b\,h_o^2}\right)'$ entspricht dem wirklichen Werte $\frac{M}{b\,h_o^2}$ mal $\frac{1200}{\sigma_{fe}'}$, resp. $\frac{M}{b\,h_o^2}$ mal $\frac{1000}{\sigma_{fe}'}$, woraus das wirkliche $\frac{M}{b\,h_o^2}$ und mithin das erforderliche h_o und $d = p\,h_o$ zu bestimmen ist.

Die Bestimmung von F_e erfolgt, wie unter Aufgabe 1 erörtert wurde.

Vorstehende Erörterungen mögen noch durch dieselben vier Rechnungsbeispiele wie für Tafel II und III ergänzt werden. Der Rechnungsvorgang ist genau wie früher beschrieben (siehe Aufgabe 1, resp. Aufgabe 2), und sind die entsprechenden Linienzüge an Hand der Millimeternetzlinien der Tafel leicht zu verfolgen.

Beispiel 1. (Vgl. Aufgabe 1.)

Gegeben sind:

$M = 3240000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$h_o = 48$ cm
$d = 12$ cm $= \mathbf{0{,}25}\, h_o$
$\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm²

Gesucht werden:

σ_b in kg/cm²
x in cm
F_e in cm²

$$\text{Für} \quad p = 0{,}25\,, \quad \frac{M}{b\,h_o^2} = 5{,}64 = (\sigma_b - \underset{\uparrow}{10{,}75}) = \underset{\uparrow}{0{,}192}\,, \quad \text{woraus} \qquad (y_m \rightarrow 1200 \leftarrow z_m)$$

$$\sigma_b = \frac{5{,}61}{0{,}192} + 10{,}75 = 29{,}25 + 10{,}75 = 40 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{F_e}{b\,h_o} = (40 - \underset{\uparrow}{11{,}4})\,\underset{\uparrow}{0{,}0182} \qquad (y_f \rightarrow 1200 \leftarrow z_f)$$

$$F_e = 2{,}50 \cdot 48 \cdot 28{,}6 \cdot 0{,}0182 = 62{,}5 \text{ cm}^2$$
$$x = c\,h_o = 0{,}333 \cdot 48 = 16 \text{ cm.}$$

Beispiel 2. (Vgl. Anfkg. 2.)

Gegeben sind:

$M = 3240000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$h_o = 48$ cm
$d = 12$ cm $= \mathbf{0{,}25}\, h_o$
$F_e = 75{,}3$ cm²

Gesucht werden:

x in cm
σ_b in kg/cm²
σ_{fe} in kg/cm²

$$\text{Für } p = 0{,}25, \quad \frac{F_e}{b\,h_o} = 0{,}627 = (\sigma_b - \underset{\uparrow}{11{,}4})\ \underset{\uparrow}{0{,}0182}, \text{ woraus} \qquad (y_f \rightarrow 1200 \leftarrow z_f)$$

$$\sigma_b = \frac{0{,}627}{0{,}0182} + 11{,}4 = 34{,}4 + 11{,}4 = 45{,}8 \text{ kg/cm}^2, \quad x = c h_o = 17{,}5 \text{ cm}$$

$$\frac{M}{b\,h_o^2} = (45{,}8 - \underset{\uparrow}{10{,}75})\ \underset{\uparrow}{0{,}192} = 6{,}73. \qquad (y_m \rightarrow 1200 \leftarrow z_m)$$

Das gegebene $\frac{M}{b\,h_o^2}$ beträgt 5,64,

$$\text{somit } \frac{6{,}73}{5{,}64} = \frac{45{,}8}{38{,}16} = \frac{1200}{1000}.$$

Somit sind die wirklichen Spannungen

$$\sigma_b = 38{,}16 \text{ kg/cm}^2$$
$$\sigma_{fe} = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 3. (Vgl. Anmerkg. a.)

Gegeben sind:

$M = 2700000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$h_o = 48$ cm
$d = 12$ cm $= \mathbf{0{,}25}\, h_o$
$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²

Gesucht werden:

σ_b in kg/cm²
x in cm
F_e in cm²

Diese Aufgabe kann ebenso wie Aufgabe 1 direkt gelöst werden mit

Hilfe der Kurven y'_m, z'_m, y'_f, z'_f für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm². Es sollen jedoch die Kurven y_m, z_m, y_f, z_f für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² benutzt werden.

$$\left(\frac{M}{b\,h_0^{\,2}}\right)' = \frac{M}{b\,h_0^{\,2}} \cdot \frac{1200}{1000} = 5{,}64.$$

Zu $\left(\frac{M}{b\,h_0^{\,2}}\right)' = 5{,}64$ hatten wir im Beispiel 1 bei $p = 0{,}25$, $\sigma_b = 40$ kg/cm², $x = 16$ cm und $F_e = 62{,}5$ cm².

Da das gegebene $\frac{M}{b\,h_0^{\,2}} = 4{,}7$ beträgt, so ist das wirkliche σ_b zu bestimmen, wie früher angegeben:

$$\frac{5{,}64}{4{,}7} = \frac{40}{33{,}33} = \frac{1200}{1000}$$

Somit ist die wirkliche Spannung

$$\sigma_b = 33{,}33 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 4. (Vergl. Anmkg. 6)

Gegeben sind:	Gesucht werden:
$M = 3\,240\,000$ cm/kg	h_0 in cm
$b = 250$ cm	x in cm
$d = \mathbf{0{,}25}\, h_0$	F_e in cm²
$\sigma_b = 40$ kg/cm²	
$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²	

Daß man diese Aufgabe mit Hilfe der Kurven für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² direkt lösen kann, ist selbstverständlich.

Für $d = 0{,}25\, h_0$, also bei $p = 0{,}25$ ist für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² und $\sigma_b = 40$ kg/cm².

$$y_m \leftarrow 1000 \rightarrow z_m$$

$$\frac{M}{b\,h_0^{\,2}} = (40 - \overset{\uparrow}{9{,}00}) \cdot \overset{\uparrow}{0{,}192} = 5{,}95\,,$$

woraus $h_0 = 46{,}6$ cm, $d = 11{,}65$ cm
$x = 17{,}5$ cm.

$$y_f \rightarrow 1000 \rightarrow z_f$$

$$\frac{F_e}{b\,h_0} = (40 = \overset{\uparrow}{9{,}5})\; \overset{\uparrow}{0{,}0218},$$

woraus $F_e = 2{,}5 \cdot 46{,}6 \cdot (40 - 9{,}5)\; 0{,}0218 = 77{,}5$ cm².

Es sollen jedoch die Kurven für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² benutzt werden.

$$(\sigma_b)' = \sigma_b \frac{1200}{1000} = 40 \cdot \frac{1200}{1000} = 48 \text{ kg/cm}^2$$

Für $p = 0{,}25$, $\left(\frac{M}{b\,h_0^{\,2}}\right)' = (48 - 10{,}75)\; 0{,}192 = 7{,}15.$

$$7{,}15 = \frac{M}{b\,h_0^{\,2}} \cdot \frac{1200}{1000}$$

Somit ist das wirkliche $\frac{M}{b\,h_0^{\,2}} = 5{,}95$, woraus

$h_0 = 46{,}6$ cm, $d = 11{,}65$ cm, $x = 17{,}5$ cm

$\frac{F_e}{b\,h_0} = (48 - 11{,}4)\; 0{,}0182$, woraus

$F_e = 2{,}5 \cdot 46{,}6 \cdot (48 - 11{,}4)\; 0{,}0182 = 77{,}5$ cm².



Anders gestellte Aufgaben, als die hier aufgeführten, sind in ähnlicher Weise mit Hilfe der Kurven leicht zu lösen.

Bemerkungen zu Tafel IV.

Auf die in der Tafel IV eingetragenen Bemerkungen und Formeln, die zur Herstellung der Tafel gedient haben, sei noch besonders hingewiesen.

Tafel V.

Graphisch dargestellte Formeln.

Für: $x > d$, $n = \frac{E_f}{E_b} = 15$

$d = p\,h_0$, **wobei „p" beliebig**

σ_b = **beliebig bis 60 kg/cm²**

σ_{fe} = **1200 kg/cm², resp. 1000 kg/cm, resp. beliebig**

$\frac{M}{b\,h_0^2} = \frac{1}{\mu^2}$ **und** $\frac{F_e}{b\,h_0} = f.$

Aufgabe 1.	Gegeben sind:	Gesucht werden:
	M in cm/kg	σ_b in kg/cm²
	b in cm	x in cm
	d in cm $= p\,h_0$	F_e in cm²
	$\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² resp. 1000 kg/cm².	

Man bildet den Wert $\frac{M}{b\,h_0^2} = \frac{1}{\mu^2}$ und liest denselben oberhalb der Mittelhorizontalen am Rande rechts (für $\sigma_{fe} = 1200$) oder links (für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²) oder auf der Mittelvertikalen ab, zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Horizontale bis zum Schnitt mit einem der Strahlen $\frac{1}{\mu^2}$ für das gegebene „p" bei $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. 1000 kg/cm², lotet den Schnittpunkt auf die Mittelhorizontale des Blattes und liest dort σ_b in kg/cm² direkt ab. Verlängert man die Lotrechte durch σ_b nach unten bis zum Schnitt mit dem entsprechenden Strahl „f" des gegebenen „p" für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. 1000 kg/cm², zieht durch diesen Schnittpunkt eine Horizontale bis zur Mittelvertikalen des Blattes, oder bis zum Rande rechts oder links, so liest man dort den Prozentsatz „f" für $b = 100$ cm direkt ab zur Bestimmung von $F_e = f\,b\,h_0$, wobei zu beachten ist, daß b in m, h_0 in cm zu setzen ist, und F_e ergibt sich alsdann in cm². Der Wert von x bestimmt sich aus den eingetragenen Kurven für „c". Die Ordinaten dieser Kurven sind dieselben wie für $\frac{M}{b\,h_0^2}$, jedoch zu lesen in einem zehnmal kleineren Maßstabe, was leicht aus der Tafel zu erkennen ist.

Aufgabe 2.	Gegeben sind:	Gesucht werden:
	M in cm/kg	x in cm
	b in cm	σ_b in kg/cm²
	h_0 in cm	σ_{fe} in kg/cm²
	d in cm $= p\,h_0$	
	F_e in cm²	

Man bildet den Wert $\frac{F_e}{b h_o}$ (F_e in cm², b in m, h_o in cm) und liest denselben unterhalb der Mittelhorizontalen am Rande rechts (für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm²) oder links (für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²), oder auf den Mittelvertikalen ab, zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Horizontale bis zum Schnitt mit einem der Strahlen „f“ für das gegebene „p“ bei $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. 1000 kg/cm², lotet den Schnittpunkt auf die Mittelhorizontale des Blattes und liest dort σ_b in kg/cm² direkt ab. (Dieses σ_b entspricht natürlich einem $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. einem $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², je nachdem man mit den Strahlen für 1200 kg/cm², resp. für 1000 kg/cm² arbeitet.) Verlängert man die Lotrechte nach oben bis zum Schnitt mit dem entsprechenden Strahl „$\frac{1}{\mu^2}$“ des gegebenen „p“ für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. 1000 kg/cm², zieht durch diesen Schnittpunkt eine Horizontale bis zur Mittelvertikale des Blattes, oder bis zum Rande rechts oder links, so liest man dort den Wert $\frac{M}{b h_o^2}$ direkt ab. (Dieses $\frac{M}{b h_o^2}$ entspricht natürlich einem $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. einem $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², je nachdem man mit den Strahlen für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² arbeitet.)

Der Wert von x bestimmt sich aus den eingetragenen Kurven für „c“. Die Ordinaten dieser Kurven sind dieselben wie für $\frac{M}{b h_o^2}$, jedoch zu lesen in einem zehnmal kleineren Maßstabe, was leicht aus der Tafel zu erkennen ist.

Ist das abgelesene $\frac{M}{b h_o^2}$ identisch mit dem gegebenen $\frac{M}{b h_o^2}$, dann sind die Spannungen identisch mit den abgelesenen σ_b für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm², resp. σ_b für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm². Ist das abgelesene $\frac{M}{b h_o^2}$ verschieden von dem gegebenen $\frac{M}{b h_o^2}$, dann sind die Spannungen mit Hilfe des Rechenschiebers leicht und hinreichend genau bestimmt wie folgt.

Es verhalten sich nämlich:

$$\frac{\text{Abgelesenes } \frac{M}{b h_o^2}}{\text{Gegebenen } \frac{M}{b h_o^2}} = \frac{\text{abgelesenes } \sigma_b}{\text{wirklichen } \sigma_b} = \frac{\sigma_{fe} = 1200 \text{ resp. } 1000}{\text{wirklichen } \sigma_{fe}}.$$

Hieraus folgt, daß die Tafel für jedes beliebige σ_{fe}' und σ_b zu gebrauchen ist, und ist das unter a und b für Tafel IV Gesagte auch hier anwendbar, nur daß hier die Werte $\frac{M}{b h_o^2}$ oberhalb Blattmitte und die Werte $\frac{F_e}{b h_o}$ unterhalb Blattmitte für die betreffenden Strahlen der gegebenen „p“ abzulesen sind.

Zwischenstrahlen für beliebige „p“ können interpoliert, resp. genau gezeichnet werden. Hierüber siehe Bemerkungen zu Tafel V.

Vorstehende Erörterungen mögen noch durch dieselben vier Rechnungs-Beispiele wie für Tafel IV bei $x > d$ ergänzt werden. Der Rechnungsvorgang ist genau, wie früher beschrieben (siehe Aufgabe 1, resp. Aufgabe 2), und sind die entsprechenden Linienzüge an Hand der Millimeternetzlinien der Tafel leicht zu verfolgen.

Beispiel 1. (Vgl. Aufgabe 1.)

Gegeben sind:
$M = 3240000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$h = 48$ cm
$d = 12$ cm $= \mathbf{0{,}25}\ h_0$
$\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm²

Gesucht werden:
σ_b in kg/cm²
x in cm
F_e in cm²

Für $p = 0{,}25$, $\frac{M}{b h_0^2} = \frac{1}{\mu^2} = 5{,}64$. Hierzu entspricht bei dem Strahl 0,25 für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² ein $\sigma_b = 40$ kg/cm², zu diesem ein $c = 0{,}333$, somit $x = 0{,}333 \cdot 48 = 16$ cm $> d$.

Zu $\sigma_b = 40$ kg/cm² entspricht bei dem Strahl 0,25 für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² ein $f = 0{,}52$ für $b = 100$ cm, somit $F_e = 0{,}52 \cdot 2{,}5 \cdot 48 = 62{,}5$ cm².

Beispiel 2. (Vgl. Aufgabe 2.)

Gegeben sind:
$M = 3240000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$h_0 = 48$ cm
$d = 12$ cm $= \mathbf{0{,}25}\ h_0$
$F_e = 75{,}3$ cm².

Gesucht werden:
x in cm
σ_b in kg/cm²
σ_{fe} in kg/cm²

Für $p = 0{,}25$, $\frac{F_e}{b h_0} = f = 0{,}627$. Hierzu entspricht bei dem Strahl 0,25 für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² ein $\sigma_b = 45{,}8$ kg/cm² und hierzu ein $c = 0{,}364$, somit $x = c h_0 = 0{,}364 \cdot 48 = 17{,}5$ cm $> d$.

Zu $\sigma_b = 45{,}8$ kg/cm² entspricht bei dem Strahl 0,25 für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² ein $\frac{M}{b h_0^2} = \frac{1}{\mu^2} = 6{,}73$.

Das gegebene $\frac{M}{b h_0}$ beträgt 5,64, somit

$$\frac{6{,}73}{5{,}64} = \frac{45{,}8}{38{,}16} = \frac{1200}{1000},$$

somit sind die wirklichen Spannungen

$$\sigma_b = 38{,}16 \text{ kg/cm}^2$$
$$\sigma_{fe} = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 3. (Vgl. Anmerkung a.)

Gegeben sind:
$M = 2700000$ cm/kg
$b = 250$ cm
$h_0 = 48$ cm
$d = 12$ cm $= \mathbf{0{,}25}\ h_0$
$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²

Gesucht werden:
σ_b in kg/cm²
x in cm
F_e in cm²

Diese Aufgabe kann wie Aufgabe 1 direkt gelöst werden mit Hilfe der Strahlen für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm². Es sollen jedoch die Strahlen für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² benutzt werden.

$$\left(\frac{M}{b h_0^2}\right)' = \frac{M}{b h_0^2} \cdot \frac{1200}{1000} = 5{,}64 = \frac{1}{\mu^2}$$

Zu $\left(\frac{M}{b h_0^2}\right)' = 5{,}64$ hatten wir in Beispiel 1 bei $p = 0{,}25$, $\sigma_b = 40$ kg/cm², $x = 16$ cm und $F_e = 62{,}5$ cm².

Da das gegebene $\frac{M}{b h_o^2} = 4,7$ beträgt, so ist das wirkliche σ_b zu bestimmen, wie früher angegeben:

$$\frac{5,64}{4,7} = \frac{40}{33,33} = \frac{1200}{1000},$$

somit ist die wirkliche Spannung

$$\sigma_b = 33,33 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 4 (Vgl. Anmerkung b.)

Gegeben sind:	Gesucht werden:
$M = 3240000$ cm/kg	h_o in cm
$b = 250$ cm	x in cm
$d = 0,25\ h_o$	F_e in cm²
$\sigma_b = 40$ kg/cm²	
$\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm²	

Daß man diese Aufgabe mit Hilfe der Strahlen für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² direkt lösen kann, ist selbstverständlich.

Für $p = 0,25$ bei $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm² entspricht bei $\sigma_b = 40$ kg/cm² ein $\frac{M}{b h_o^2} = \frac{1}{\mu^2} = 5,95$,

woraus $h_o = 46,6$, $d = 11,65$, $x = 17,5$ cm

$$\frac{F_e}{b h_o} = f = 6,67, \text{ woraus}$$

$$F_e = 2,5 \cdot 46,6 \cdot 6,67 = 77,5 \text{ cm}^2.$$

Es sollen jedoch die Strahlen für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² benutzt werden.

$$(\sigma_b)' = \sigma_b \frac{1200}{1000} = 40 \cdot \frac{1200}{1000} = 48 \text{ kg/cm}^2.$$

Zu $(\sigma_b)' = 48$ kg/cm² entspricht bei $p = 0,25$ ein $\left(\frac{M}{b h_o^2}\right)' = 7,18$ (statt wie früher 7,15)

$$7,18 = \frac{M}{b h_o^2} \cdot \frac{1200}{1000},$$

somit ist das wirkliche $\frac{M}{b h_o^2} = 5,98$ (statt 5,95 wie früher).

Daraus $h_o = 46,6$ cm, $d = 0,25\ h_o = 11,65$ cm, $x = 17,5$ cm.

Zu $\sigma_b = 48$ kg/cm² bei $p = 0,25$ ist

$$\frac{F_e}{b h_o} = f = 6,67, \text{ woraus}$$

$$F_e = 2,5 \cdot 46,6 \cdot 6,67 = 77,5 \text{ cm}^2.$$

Anders gestellte Aufgaben als die hier vorgeführten sind in ähnlicher Weise mit Hilfe der Tafel leicht zu lösen.

Bemerkungen zu Tafel V.

Die gestrichelten Kurven in den Quadranten für $\sigma_{fe} = 1000$ kg/cm², resp. für $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² gestatten ebenfalls leicht die Lösung der oben vorgeführten Aufgaben für $x > d$.

Es entsprechen in diesen Kurven zu den Abszissen „p“ (auf der Mittelhorizontalen gleichlaufend mit dem σ_b für die Strahlen) Ordinaten $\frac{M}{b h_o^2} = \frac{1}{\mu^2}$ oberhalb der Mittelhorizontalen, resp. Ordinaten $\frac{F_e}{b h_o} = f$ unterhalb der Mittel-

horizontalen, und zwar links für $\sigma_{fe} = 1000\,kg/cm^2$ und rechts für $\sigma_{fe} = 1200\,kg/cm^2$ bei $\sigma_b = 20, 30, 40$ und $50\,kg/cm^2$.

Im Schnittpunkte der Horizontalen durch „$\frac{1}{\mu^2}$", resp. „f" mit der Vertikalen durch „p" ergibt sich das σ_b wie folgt:

Es ist aus der Tafel zu ersehen, daß die Entfernungen zwischen den Kurven für $\sigma_b = 20, 30, 40$ und $50\,kg/cm^2$ für ein und dasselbe „p" einander gleich sind, und zwar je für die Ordinaten „$\frac{1}{\mu^2}$", resp. je für die Ordinaten „f". Liegt genannter Schnittpunkt zwischen zwei Kurven für σ_b, z. B. zwischen der Kurve $\sigma_b = 20$ und $\sigma_b = 30$, so teilt man den Ordinatenabschnitt zwischen diesen zwei Kurven in zehn gleiche Teile und liest so mit genügender Genauigkeit den Wert von σ_b für den betreffenden Punkt ab.

Aus dem oben Gesagten folgt auch, daß man für jedes beliebige „p" die Strahlen „$\frac{1}{\mu^2}$", resp. „f" für $\sigma_{fe} = 1000\,kg/cm^2$, resp. für $\sigma_{fe} = 1200\,kg/cm^2$ mit Hilfe dieser Kurven zeichnen kann. Man braucht nur für das gegebene „p" die Ordinaten $\frac{1}{\mu^2}$ der Kurven für $\sigma_b = 20, 30, 40$ abzulesen und im entsprechenden Maßstab über $\sigma_b = 20, 30, 40$ über der Mittelhorizontalen als Ordinaten auftragen. Die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Ordinaten ergibt eine gerade Linie, den Strahl „$\frac{1}{\mu^2}$" für das gegebene p. Ebenso liest man die Ordinaten f der Kurven für $\sigma_b = 20, 30, 40$ ab und trägt dieselben im entsprechenden Maßstab über $\sigma_b = 20, 30, 40$ unter der Mittelhorizontalen als Ordinaten auf. Die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Ordinaten ergibt eine gerade Linie, den Strahl „f" für das gegebene p.

Die Vorführung von Rechnungsbeispielen mit Hilfe der gestrichelten Kurven erübrigt sich wohl und wird auf Beispiel 1 und 2 für $x > d$ verwiesen. Der Rechnungsvorgang ist genau wie früher beschrieben (siehe Aufgabe 1, resp. Aufgabe 2), und sind die entsprechenden Linienzüge an Hand der Millimeternetzlinien der Tafel leicht zu verfolgen. Daß man auch mit den gestrichelten Kurven jedes beliebige σ_{fe}' und σ_b ausnutzen kann, ist selbstverständlich. (Siehe Anmerkung a und b.)

Was die punktierten Strahlen bedeuten, dürfte wohl leicht einzusehen sein; die Horizontalen durch $\frac{M}{b\,h_o^2} = \frac{1}{\mu^2}$, die einen punktierten Strahl schneiden, besagen, daß für diesen Wert von „$\frac{1}{\mu^2}$" bei dem betreffenden „p" das entsprechende $x < d$ ist.

Z. B. $\frac{1}{\mu^2} = 3{,}0$; bei $p = 0{,}32$ und $\sigma_{fe} = 1200\,kg/cm^2$ entspricht $c = 0{,}257$, somit für $x = c\,h_o$ und $h_o = \frac{d}{p}$, wird $x = \frac{c\,d}{p} = \frac{0{,}257}{0{,}32}\,d$, also $x < d$.

Auf die in der Tafel V eingetragenen Bemerkungen und Formeln, die zur Herstellung der Tafel gedient haben, sei noch besonders hingewiesen.

Zweiter Abschnitt.

Allgemein gültige Formeln zur Berechnung von Eisenbeton-Plattendecken, resp. Plattenbalken bei einer beliebigen Ausnutzung der Materialien Eisen und Beton hinsichtlich ihrer Inanspruchnahme auf Zug, resp. Druck.

a) Formeln für einfache Armierung.

Auf Grund der vom Verbande deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine und dem Deutschen Beton-Verein, sowie durch preußischen Ministerialerlaß aufgestellten „Vorläufige Leitsätze für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Eisenbetonkonstruktionen“ sind unter letzterem Abschnitt Formeln abgeleitet worden, die die Ermittelung der Inanspruchnahme der Materialien Beton und Eisen, der Platten oder Plattenbalken gestatten, wenn vorher die Querschnittsdimensionen beider Materialien angenommen werden. Hieraus folgt, daß, wenn beide oder auch nur eines der beiden Materialien bis zur Grenze der zulässigen Inanspruchnahme ausgenutzt werden soll, ein mehrmaliges Probieren durch Änderung in der Wahl der Querschnittsdimensionen erforderlich ist, was umständlich zu bezeichnen ist. Wohl ist in den Leitsätzen für Deckenplatten eine Formel abgeleitet, die nur eine einmalige Rechnung erfordert, um die Querschnittsdimensionen derart zu bestimmen, daß $\sigma_b = 40$ kg/cm² und $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm². Es soll des weiteren hier gezeigt werden, daß sich einfache Formeln ableiten lassen, die ohne vorherige Annahme der Eisendimensionierung, bei nicht gegebener nutzbarer Höhe h_0 für Platten oder Plattenbalken die Inanspruchnahme der Materialien Eisen und Beton stets bis zu den angenommenen zulässigen Grenzen auszunutzen gestatten, oder bei gegebener nutzbarer Höhe h_0 für Platten oder Plattenbalken eine der Inanspruchnahme der Materialien (Beton oder Eisen) stets bis zu der angenommenen zulässigen Grenze derart auszunutzen gestatten, daß die Inanspruchnahme des anderen Materials die hierfür angenommene zulässige Grenze nicht übersteigt. Die Formeln besitzen allgemeine Gültigkeit unter Voraussetzung des Proportionsgesetzes:

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_{fe}} = \frac{x}{n(h_0 - x)}.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß in jedem Falle, ob für Platten oder Plattenbalken, sobald n, σ_{fe} und σ_b angenommen sind, wird x stets ein bestimmter Teil der nutzbaren Höhe h_0 sein.

$x = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_{fe}}{n}} h_o$, worin $n = \frac{E_{fe}}{E_b}$ = Verhältnis der Elastizitätskoeffizienten des Eisens und Betons.

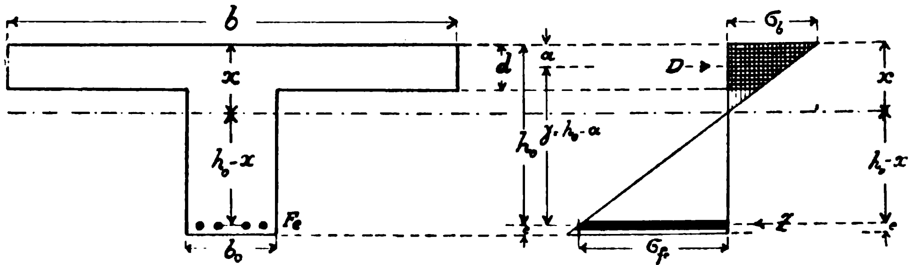


Fig. 1

Es bezeichnen in der Figur 1:

d die zu einem Plattenbalken zugehörige volle Plattenstärke,
h_o die nutzbare Plattenhöhe, resp. Plattenbalkenhöhe,
x der Abstand der Neutralfaser von der Oberfaser,
a der Abstand des Schwerpunktes der Druckfläche von der Oberfaser. Dieser Schwerpunkt ist der Druckmittelpunkt. Für Dreiecksflächen ist $a = \frac{1}{3} x$; für Trapezflächen von der Höhe d ist dieser Wert $a = \frac{d}{3} \cdot \frac{3x - 2d}{2x - d}$, wie leicht zu erkennen ist.*)
y der Abstand von Druck- und Zugmittelpunkt,
b die Druckbreite für Platten, resp. Plattenbalken,
b_o die Plattenbalkenbreite,
e die erforderliche Einbettungsstärke der Eisen,
Fe, σ_{fe}, σ_b bezeichnen wie gewöhnlich den Eisenquerschnitt, resp. die zulässigen Inanspruchnahmen für Eisen auf Zug und Beton auf Druck.

Da bei jedem auf Biegung beanspruchten Träger die Druckkraft D gleich der Zugkraft Z sein muß, und das Biegungsmoment M der äußeren Kräfte gleich M_i der inneren Kräfte sein muß, folgt:

Für Trapez-Spannungsfläche:

$$D = Z \begin{cases} D = \frac{1}{2}\left(\sigma_b + \sigma_b \frac{x-d}{x}\right) bd = bd\sigma_b \frac{2x-d}{2x}, \\ Z = F_e \sigma_{fe} \end{cases}$$

$$\text{somit } F_e \sigma_{fe} = bd\sigma_b \frac{2x-d}{2x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$M = M_i = M_D = M_Z = F_e \sigma_{fe} (h_o - a) = bd\sigma_b \frac{2x-d}{2x} (h_o - a)$$

$$\text{oder } F_e \sigma_{fe} = \frac{M}{h_o - a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

*) Schwerpunktslage eines Trapezes mit den Seiten σ_b und $\sigma_b \frac{x-d}{x}$ und der Höhe d bestimmt sich aus:

$$a = \frac{d}{3} \frac{\sigma_b + 2\sigma_b \frac{x-d}{x}}{\sigma_b + \sigma_b \frac{x-d}{x}} = \frac{d}{3} \frac{3x-2d}{2x-d}.$$

Aus Gleichung 1 und 2 folgt:

$$b d \sigma_b \frac{2x-d}{2x} = \frac{M}{h_0 - a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Setzt man hierin für σ_b den Wert aus der Proportionsgleichung $\sigma_b = \frac{\sigma_{fe}\, x}{n\,(h_0 - x)}$ und für a den gegebenen Wert $a = \frac{d}{3} \frac{3x-2d}{2x-d}$, so erhält man durch Umformung:

$$\frac{bd\,\sigma_{fe}}{2n\,(h_0 - x)} = \frac{3M}{x\,(6h_0 - 3d) - d\,(3h_0 - 2d)} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

oder durch Auflösung dieser Gleichung nach x, erhält man durch einige Umformungen:

$$\textbf{Formel I:}\ x = \frac{bd^2(3h_0 - 2d) + \frac{6n}{\sigma_{fe}} M h_0}{bd\ (6h_0 - 3d) + \frac{6n}{\sigma_{fe}} M}.$$

Diese Formel I gilt für Plattenbalken mit gegebener nutzbarer Höhe h_0 und $x > d$. Hierbei $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig.

Für Dreieck-Spannungsfläche:

$$D = Z \begin{cases} D = \frac{1}{2}\, \sigma_b\, b\, x \\ Z = F_e\, \sigma_{fe} \end{cases}$$

$$\text{somit } F_e\, \sigma_{fe} = \frac{1}{2}\, \sigma_b\, b\, x. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$M = M_i = M_D = M_Z = F_e \sigma_{fe}\, (h_0 - a) = \frac{1}{2}\, \sigma_b\, b\, x\ (h_0 - a)$$

$$\text{oder } F_e\, \sigma_{fe} = \frac{M}{h_0 - a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus Gleichung 1 und 2 folgt:

$$\frac{1}{2} \sigma_b\, b\, x = \frac{M}{h_0 - a}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Setzt man hierin für $\sigma_b = \frac{\sigma_{fe}\, x}{n\,(h_0 - x)}$ und für $a = \frac{x}{3}$, so erhält man durch Umformung:

$$\frac{b\, \sigma_{fe}\, x^2}{2n\ (h_0 - x)} = \frac{3M}{3h_0 - x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

oder hieraus durch Umformung zur Auflösung dieser Gleichung nach x erhält man:

$$\textbf{Formel II:}\ x^2\ (x - 3h_0) = \frac{6n}{\sigma_{fe}} \frac{M}{b} (x - h_0).$$

Diese Formel II gilt für Platten oder Plattenbalken mit $x < d$ bei gegebener nutzbarer Höhe h_0. Hierbei $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig.

Der Wert von x wird aus dieser kubischen Gleichung sehr leicht durch die bekannte Regula falsi ermittelt, graphisch oder analytisch mittelst des Rechenschiebers. Der geschickte Rechner wird meistens nur zwei Werte für x anzunehmen brauchen, die in der Nähe der Wurzel der Gleichung liegen und dann mit Hilfe des Rechenschiebers durch eine einfache Proportion zweier

ähnlichen Dreiecke, den für die Zwecke der Rechnung genügend genauen Wert von x zu finden, für welchen die Gleichung erfüllt wird. Hat man aus Formel I, resp. II x bestimmt, dann ist

$$F_e = \frac{M}{\sigma_{fe}(h_o - a)} = \frac{M}{\sigma_{fe} \cdot y},$$

worin a die angegebene Bedeutung hat von $\frac{d}{3} \cdot \frac{3x-2d}{2x-d}$ in Formel I oder $\frac{x}{3}$ in Formel II.

Alsdann $\sigma_b = \frac{\sigma_{fe}\, x}{n(h_o - x)}$ für jeden Fall.

Fassen wir nochmals die Formel I ins Auge:

$$x = \frac{bd^2(3h_o - 2d) + \frac{6n}{\sigma_{fe}} M h_o}{bd(6h_o - 3d) + \frac{6n}{\sigma_{fe}} M},$$

so lassen sich hieraus noch folgende interessante Formeln ableiten:

a) Bedingung $x = d$, so wird

$$\text{I}^a \text{ u. II}^a: \; h_o = \frac{bd^3 - \frac{6n}{\sigma_{fe}} Md}{3bd^2 - \frac{6n}{\sigma_{fe}} M}; \qquad F_e = \frac{M}{\sigma_{fe} \cdot \left(h_o - \frac{d}{3}\right)}$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{fe} \cdot d}{n\,(h_o - d)}.$$

b) Bedingung $x = \frac{1}{3} h_o > d$, so wird:

$$x^2 - x\underbrace{\left(\frac{2}{3} d + \frac{2n}{3\sigma_e} \frac{M}{bd}\right)}_{A} + \frac{d^2}{9} = o.$$

$$\text{I}^b: x = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{d^2}{9}} \qquad F_e = \frac{bd\,(2x - d)}{4nx}$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{fe}}{2n}$$

c) Bedingung $x = \frac{1}{3} h_o < d$, so wird

$$\text{I}^c: x = \sqrt{\frac{3n}{2\sigma_{fe}} \frac{M}{b}}; \qquad F_e = \frac{bx}{4n} = \frac{bd}{4n} = \frac{bh_o}{12n}$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{fe}}{2n}$$

Bemerkung. In I^b für F_e und σ_b bei $x = d$ erhält man dieselben Werte wie bei I^c. Letztere Formeln gelten somit für Platten sowohl wie für Plattenbalken.

Fassen wir nochmals die Formel II ins Auge:

$$x^2(x - 3h_o) = \frac{6n}{\sigma_{fe}} \frac{M}{b} (x - h_o),$$

so lassen sich hieraus ebenfalls die Formeln II^a und II^c ableiten, wenn man

für erstere $x = d$ resp. für letztere $x = d = {}^1/_3 h_o$ setzt. Man erhält somit die Formeln:

$$II^a: h_o = \frac{bd^3 - \frac{6n}{\sigma_{fe}} Md}{3bd^2 - \frac{6n}{\sigma_{fe}} M} \qquad F_e \text{ und } \sigma_b \text{ wie bei } I^a$$

$$II^c: \quad x = \sqrt{\frac{3n}{2\sigma_{fe}} \cdot \frac{M}{b}} \qquad F_e \text{ und } \sigma_b \text{ wie bei } I^c.$$

Die Anwendung der hier angegebenen Formeln auf Zahlenbeispiele führen zu Ergebnissen, die in vollkommenem Einklang stehen mit denen der Berechnungsweise nach den Leitsätzen, nur ist die Berechnung insofern vereinfacht, daß bei gegebener nutzbarer Höhe h_o für Platten oder Plattenbalken eine vorherige Annahme der Eisendimensionierung nicht erforderlich ist, und daß die Inanspruchnahme für Beton und Eisen bis zur zulässigen Grenze ausgenutzt werden kann — bei nicht gegebenem h_o —, oder die Inanspruchnahme des einen Materials bis zur zulässigen Grenze derart ausgenutzt werden kann, daß die des anderen Materials die hierfür zulässige Grenze nicht übersteigt — bei gegebenem h_o. —

Erstere Ausnutzungsart erscheint wirtschaftlich für Platten, weniger für Plattenbalken; letztere Ausnutzungsart erscheint für Platten sowohl wie für Plattenbalken wirtschaftlich.

Sind z. B. als zulässige Grenzen festgesetzt:

$$\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_{fe} = 1200 \text{ kg/cm}^2,$$

so folgt aus:

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_{fe}} = \frac{x}{n(h_o - x)} = \frac{40}{1200} \text{ oder } \frac{x}{h_o - x} = \frac{n \cdot 40}{1200} \text{ und für } n = 15,$$

$$\frac{x}{h_o - x} = \frac{1}{2}.$$

Ist $\frac{x}{h_o - x} = \frac{1}{2}$, so kann σ_b und σ_{fe} ausgenutzt werden.

Ist $\frac{x}{h_o - x} > \frac{1}{2}$, so kann nur σ_b ausgenutzt werden, ohne daß σ_{fe} die hierfür zulässige Grenze erreicht.

Ist $\frac{x}{h_o - x} < \frac{1}{2}$, so kann nur σ_{fe} ausgenutzt werden, ohne daß σ_b die hierfür zulässige Grenze erreicht.

Die Form, die die Gleichung I, resp. II annimmt, wenn σ_b ausgenutzt werden soll, ist mit Leichtigkeit zu ersehen.

$$\text{Formel I.} \quad x = \frac{bd^2 (3h_o - 2d)}{bd(6h_o - 3d) - \frac{6M}{\sigma_b}}$$

$$\text{Formel II.} \quad x^2 - 3h_o x + \frac{6M}{\sigma_b} = o$$

$$\text{oder } x = 1{,}5 h_o - \sqrt{2{,}25 h_o^2 - \frac{6M}{\sigma_b \cdot b}}.$$

Hieraus ergeben sich ebenfalls die Formeln Ia, b, c, resp. II, a, c.

$$\text{I}^a:\; x = d; \qquad h_o = \frac{2M}{\sigma_b \cdot bd} + \frac{d}{3}; \qquad \text{II}^a:\; h_o = \frac{2M}{\sigma_b \cdot bd} + \frac{d}{3}$$

$$\text{I}^c:\; x = \frac{1}{3} h_o < d; \qquad x = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{M}{\sigma_b \cdot b}}; \qquad \text{II}^c:\; x = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{M}{\sigma_b \cdot b}}$$

$$\text{I}^b:\; x = \frac{1}{3} h_o > d; \qquad x^2 - x \left(\frac{2}{3} d + \frac{M}{3 \sigma_b \cdot bd}\right) + \frac{d^2}{3} = o, \text{ woraus } x.$$

Die bisher abgeleiteten Formeln haben allgemeine Gültigkeit, unter Voraussetzung linearer Spannungsverteilung und einfacher Armierung. Die im Balkensteg auftretenden Druck- und Zugspannungen des Betons sind hierbei vernachlässigt. Über die Form, welche die Formeln annehmen, wenn man die Druckspannungen, oder auch die Zugspannungen des Betons im Balkensteg berücksichtigt, oder wenn man mit parabolischer Spannungsverteilung rechnet, gedenke ich noch Mitteilungen zu machen.

An dieser Stelle sei noch bemerkt, daß die aufgeführten Formeln sich wesentlich vereinfachen, wenn man d in Prozentsätzen von h_o ausdrückt (wie bereits für $d = x = {}^1/_3\, h_o = 0{,}333\, h_o$ geschehen ist), also $\boldsymbol{d = p^0/_0\, h_o}$.

Einer besseren Übersichtlichkeit wegen seien die bisher abgeleiteten, allgemein gültigen Formeln für Plattenbalken und Decken bei einfacher Armierung tabellarisch zusammengestellt.

I. $\boldsymbol{x > d}$, h_o gegeben, $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig

$$x = \frac{bd^2 (3 h_o - 2 d) + \frac{6n}{\sigma_{fe}} M h_o}{bd\, (6 h_o - 3 d) + \frac{6n}{\sigma_{fe}} M}$$

$$F_e = \frac{M}{\sigma_{fe} \left(h_o - \frac{d}{3} \cdot \frac{3x - 2d}{2x - d}\right)}; \qquad \sigma_b = \frac{\sigma_{fe} \cdot x}{n\, (h_o - x)}$$

$\boldsymbol{x > d}$, h_o gegeben, $\sigma_b = \sigma$ zulässig

$$x = \frac{bd^2 (3 h_o - 2 d)}{bd\, (6 h_o - 3 d) - \frac{6}{\sigma_b} M}$$

$$F_e = \frac{M}{\sigma_{fe} \left(h_o - \frac{d}{3} \cdot \frac{3x - 2d}{2x - d}\right)}, \text{ wobei } \sigma_{fe} = \frac{\sigma_b\, n\, (h_o - x)}{x}.$$

II. $\boldsymbol{x < d}$, h_o gegeben, $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig

$$x^2 (x - 3 h_o) = \frac{6 n M}{\sigma_{fe}\, b} (x - h_o)$$

$$F_e = \frac{M}{\sigma_{fe} \left(h_o - \frac{x}{3}\right)}; \quad \sigma_b = \frac{\sigma_{fe}\, x}{n\, (h_o - x)}$$

$\boldsymbol{x < d}$, h_o gegeben, $\sigma_b = \sigma$ zulässig

$$x = 1{,}5\, h_o - \sqrt{2{,}25\, h_o^2 - \frac{6M}{\sigma_b \cdot b}}$$

$$F_e = \frac{M}{\sigma_{fe} \left(h_o - \frac{x}{3}\right)}, \quad \text{wobei } \sigma_{fe} = \frac{\sigma_b\, n\, (h_o - x)}{x}.$$

I[a] u. II[a]. $x = d$, h_o unbekannt, $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig

$$h_o = \frac{b d^3 - \frac{6n}{\sigma_{fe}} M d}{3 b d^2 - \frac{6n}{\sigma_{fe}} M}; \qquad F_e = \frac{M}{\sigma_{fe}\left(h_o - \frac{d}{2}\right)}$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{fe} d}{n (h_o - d)}$$

$x = d$, h_o unbekannt, $\sigma_b = \sigma$ zulässig

$$h_o = \frac{2M}{\sigma_b \cdot b \cdot d} + \frac{d}{3}; \qquad F_e = \frac{M}{\sigma_{fe}\left(h_o - \frac{d}{3}\right)},$$

wobei $\sigma_{fe} = \frac{\sigma_b n (h_o - d)}{d}$.

I[b]. $x = \frac{1}{3} h_o > d$, h_o unbekannt $= 3x$, $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig

$$x^2 - x \underbrace{\left(\frac{2}{3} d + \frac{2}{3} \frac{n}{\sigma_{fe}} \frac{M}{b d}\right)}_{A} + \frac{d^2}{9} = o$$

$$x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{d^2}{8}}; \qquad F_e = \frac{b d (2x - d)}{4 n x}$$

$$h_o = 3x \qquad \sigma_b = \frac{\sigma_{fe}}{2n}.$$

$x = \frac{1}{3} h_o > d$, h_o unbekannt $= 3x$, $\sigma_b = \sigma$ zulässig

$$x^2 - x \underbrace{\left(\frac{2}{3} d + \frac{M}{3 \sigma_b \cdot b \cdot d}\right)}_{A} + \frac{d^2}{9} = o$$

$$x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{d^2}{9}}; \qquad F_e = \frac{b d (2x - d)}{4 n x}$$

$$h_o = 3x \qquad \sigma_{fe} = 2 n \sigma_b.$$

I[c] u. II[c]. $x = \frac{1}{3} h_o < d$, h_o unbekannt $= 3x$, $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig

resp. $= 3d$

$$x = \sqrt{\frac{3n}{2\sigma_{fe}} \cdot \frac{M}{b}}; \qquad F_e = \frac{bx}{4n} = \frac{bd}{4n} = \frac{b h_o}{12 n}$$

$$h_o = 3x \qquad \sigma_b = \frac{\sigma_{fe}}{2n}$$

$x = \frac{1}{3} h_o < d$, h_o unbekannt $= 3x$, $\sigma_b = \sigma$ zulässig

resp. $= 3d$

$$x = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{M}{\sigma_b \cdot b}}; \qquad F_e = \frac{bx}{4n} = \frac{bd}{4n} = \frac{b h_o}{12 n}$$

$$\sigma_{fe} = 2 n \sigma_b.$$

Welche der Formeln für jeden Fall brauchbar anzuwenden sind, besagt das Proportionsgesetz:

$$\frac{x}{h_o - x} \lesseqgtr \frac{n \sigma_b}{\sigma_{fe}}.$$

Ist $\frac{x}{h_0 - x} = \frac{n\sigma_b}{\sigma_{fe}}$, so ist es gleich, ob man die Formeln mit $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig, oder mit $\sigma_b = \sigma$ zulässig anwendet.

Ist $\frac{x}{h_0 - x} > \frac{n\sigma_b}{\sigma_{fe}}$, so sind die Formeln mit $\sigma_b = \sigma$ zulässig anzuwenden, damit σ_{fe} unter σ zulässig bleibt.

Ist $\frac{x}{h_0 - x} < \frac{n\sigma_b}{\sigma_{fe}}$, so sind die Formeln mit $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig anzuwenden, damit σ_b unter σ zulässig bleibt.

Anwendungsbeispiele.

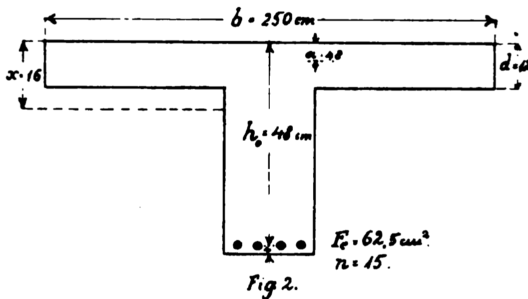


Fig. 2.

Beispiel 1. $x > d$.

Nebenstehender Balken (Fig. 2) habe einem Biegungsmomente

$$M = 3240000 \text{ cm/kg}$$

zu widerstehen.

Sei $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig $= 1200$ kg/cm², dann folgt aus

Formel I. $$x = \frac{250 \cdot 12^2 \, (3 \cdot 48 - 2 \cdot 12) + \frac{6 \cdot 15}{1200} \, 3240000 \cdot 48}{250 \cdot 12 \, (6 \cdot 48 - 3 \cdot 12) + \frac{6 \cdot 15}{1200} \, 3240000}$$

$$x = \frac{4320000 + 11664000}{756000 + 243000} = \frac{15984000}{999000} = 16 \text{ cm}$$

$$a = \frac{12}{3} \cdot \frac{3 \cdot 16 - 2 \cdot 12}{2 \cdot 16 - 12} = 4 \cdot \frac{48 - 24}{32 - 12} = 4{,}8 \text{ cm}$$

$$y = 48 - 4{,}8 = 43{,}2 \text{ cm}$$

$$F_e = \frac{3240000}{43{,}2 \cdot 1200} = 62{,}5 \text{ cm}^2 \text{ erforderlich}$$

$$\sigma_b = \frac{1200 \cdot 16}{15 \, (48 - 16)} = 40 \text{ kg/cm}^2$$

Sei $\sigma_b = \sigma$ zulässig $= 40$ kg/cm², dann folgt aus

Formel I: $$x = \frac{250 \cdot 12^2 \, (3 \cdot 48 - 2 \cdot 12)}{250 \cdot 12 \, (6 \cdot 48 - 3 \cdot 12) - \frac{6 \cdot 3240000}{40}}$$

$$x = \frac{4320000}{756000 - 486000} = 16 \text{ cm.}$$

Es ist zu ersehen, daß

$$\frac{x}{h_0 - x} = \frac{16}{48 - 16} = \frac{n\sigma_b}{\sigma_{fe}} = \frac{15 \cdot 40}{1200} = \frac{1}{2},$$

daher bleibt es sich gleich, ob man die Formel mit $\sigma_b = \sigma$ zulässig oder mit $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig anwendet.

Wäre $\frac{x}{h_0 - x} > \frac{n\sigma_b}{\sigma_{fe}}$, so wäre die Formel mit $\sigma_b = \sigma$ zulässig anzuwenden, damit σ_{fe} unter σ zulässig bleibt.

Wäre $\frac{x}{h_o - x} < \frac{n\,\sigma_b}{\sigma_{fe}}$, so wäre die Formel mit $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig anzuwenden, damit σ_b unter σ zulässig bleibt.

Da in vorgeführtem Beispiel $x = \frac{1}{3} h_o$ ist, so müssen auch die Formeln I b dieselben Resultate liefern bei $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig oder bei $\sigma_b = \sigma$ zulässig.

Formel I^b mit $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig $= 1200$ kg/cm^2:

$$A = \frac{2}{3}\,12 + \frac{2 \cdot 15}{3 \cdot 2200} \cdot \frac{3240000}{250 \cdot 12} = 8 + 9 = 17$$

$$x = \frac{17}{2} + \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - \frac{12^2}{9}} = 8{,}5 + \sqrt{56{,}25} = 8{,}5 + 7{,}5 = 16 \text{ cm.}$$

Formel I^b mit $\sigma_b = \sigma$ zulässig $= 40$ kg/cm^2:

$$A = \frac{2}{3}\,12 + \frac{3240000}{3 \cdot 40 \cdot 250 \cdot 12} = 8 + 9 = 17 \text{ cm,}$$

$$x = \frac{17}{2} + \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - \frac{12^2}{9}} = 8{,}5 + \sqrt{56{,}25} = 8{,}5 + 7{,}5 = 16 \text{ cm.}$$

Alle andern Ergebnisse stimmen demnach ebenfalls.

Kontrolle durch die Leitsätze:

$$x = \frac{2 \cdot 15 \cdot 62{,}5 \cdot 48 + 250 \cdot 12^2}{2\ (15 \cdot 62{,}5\ + 250 \cdot 12)} = \frac{90000 + 36000}{2\ (937{,}5 + 3000)}$$

$$x = \frac{126000}{7875} = \mathbf{16\ cm.}$$

Beispiel 2. $x < d.$

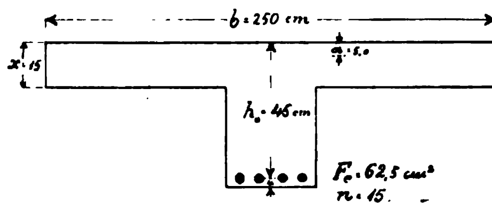


Fig. 3.

Nebenstehender Balken (Fig. 3) habe einem Biegungsmoment

$M = 3000000$ cm/kg

zu widerstehen.

Sei $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig $= 1200$ kg/cm^2, dann folgt aus

Formel II: $x^2\ (x - 3 \cdot 45) = \frac{6 \cdot 15}{1200} \cdot \frac{3000000}{250}\ (x - 45).$

Angenommen für x zwei Werte in der Nähe der Wurzel, alsdann durch Regula falsi den genügend genauen Wert für x bestimmt. Für vorliegeden Fall ist

$x = 15$ cm. $\qquad 15^2\ (15 - 135) = \frac{90}{1200} \cdot \frac{3000000}{250}\ (15 - 45)$

$$- 225 \cdot 120 = - \frac{270000000}{300000} \cdot 30$$

$27000 = 27000$, somit $x = 15$ cm richtig

$a = \frac{x}{3} = 5$ cm. $\qquad F_e = \frac{3000000}{40 \cdot 1200} = 62{,}5$ cm^2

$y = 45 - 5 = 40$ cm.

$$\sigma_b = \frac{1200 \cdot 15}{15\ (45 - 15)} = 40 \text{ kg/cm}^2.$$

Sei $\sigma_b = \sigma$ zulässig $= 40$ kg/cm². Dann folgt aus

Formel II: $x = 1{,}5 \cdot 45 - \sqrt{2{,}25 \cdot 45^2 - \frac{6 \cdot 3000000}{40 \cdot 250}}$

$$x = 67{,}5 - \sqrt{4550 - 1800} = 67{,}5 - 52{,}5 = 15 \text{ cm}.$$

Auch hier ist $\frac{x}{h_0 - x} = \frac{n\,\sigma_b}{\sigma_{fe}}$, daher sind die Formeln mit $\sigma_f = \sigma$ zulässig und $\sigma_b = \sigma$ zulässig brauchbar anzuwenden.

Da in vorgeführtem Beispiel $x = \frac{1}{3} h_0$, so müssen auch die Formeln I^c und II^c dieselben Resultate ergeben.

Formel I^c u. II^c: $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig $= 1200$; $x = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{15}{1200} \cdot \frac{3000000}{250}} = 15$ cm,

$\sigma_b = \sigma$ zulässig $= 40$; $x = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{3000000}{40 \cdot 250}} = 15$ cm.

Da überdies auch $x = d$ gemacht worden ist, so müssen auch die Formeln I^a und II^a dieselben Resultate ergeben.

Formel I^a u. II^a.

$\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig $= 1200$ kg/cm²;
$$h_0 = \frac{250 \cdot 15^3 - \frac{6 \cdot 15}{1200} 3000000 \cdot 15}{3 \cdot 250 \cdot 15^2 - \frac{6 \cdot 15}{1200} 3000000} = \frac{843750 - 3375000}{168750 - 225000} = 45 \text{ cm}$$

$\sigma_b = \sigma$ zulässig $= 40$ kg/cm²; $h_0 = \frac{2 \cdot 3000000}{40 \cdot 250 \cdot 15} + \frac{15}{3} = 45$ cm.

Alle anderen Resultate stimmen demnach ebenfalls.

Kontrolle durch die Leitsätze:

$$x = \frac{15 \cdot 62{,}5}{250} \left\{ -1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 250 \cdot 45}{15 \cdot 62{,}5} + 1} \right\}$$
$$= \frac{937{,}5}{250} \left\{ -1 + \sqrt{24 + 1} \right\} = 15 \text{ cm}.$$

Weitere Entwickelung der Formeln I und II.

Setzt man in die Formel I für $x > d$, $x = c\,h_0$, worin $c = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_{fe}}{n}}$ und $d = p\,h_0$, so erhält man durch mehrfache Umformungen:

Für $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig:

Formel α) $$\frac{M}{b h_0^2} = \frac{\sigma_{fe}}{2} \frac{p}{n} \left\{ \frac{c(2-p) - p\left(1 - \frac{2}{3} p\right)}{(1-c)} \right\}.$$

Für $\sigma_b = \sigma$ zulässig:

Formel β) $$\frac{M}{b h_0^2} = \frac{\sigma_b}{2} p \left\{ (2-p) - \frac{p}{c}\left(1 - \frac{2}{3} p\right) \right\}$$

Sowohl für α wie für β ist F_e zu bestimmen aus

Formel γ) $$\frac{F_e}{b h_0} = \frac{\sigma_b\, p}{2\,\sigma_{fe}} \left\{ 2 - \frac{p}{c} \right\}.$$

Setzt man in die Formel II für $x < d$, $x = c\,h_o$, worin $c = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_{fe}}{n}}$, und für $x = d = p\,h_o$, also $c = p$, so erhält man durch mehrfache Umformungen:

Für $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig

Formel α') $$\frac{M}{b h_o^2} = \frac{\sigma_{fe}\,c}{2n}\left\{\frac{c\left(1-\frac{1}{3}c\right)}{(1-c)}\right\}.$$

Für $\sigma_b = \sigma$ zulässig

Formel β') $$\frac{M}{b h_o^2} = \frac{\sigma_b}{2}\,c\left\{1-\frac{1}{3}c\right\}.$$

Sowohl für α' wie für β' ist F_e zu bestimmen aus

Formel γ') $$\frac{F_e}{b\,h_o} = \frac{\sigma_b}{2\,\sigma_{fe}}\,c.$$

Mit Hilfe der Formeln β und β', sowie γ und γ' sind die graphischen Tabellen hergestellt.

Die Formeln α, β, γ gehen in α', β', γ' über, wenn man $p = c$ setzt, was leicht zu erkennen ist.

Aus α oder β folgen:

α_1) $$\sigma_{fe} = \frac{n\,\sigma_b\left\{(2-p)-p\left(1-\frac{2}{3}p\right)\right\} - \frac{2\,M\,n}{b\,p\,h_o^2}}{p\left(1-\frac{2}{3}p\right)}$$ wenn $\sigma_b = \sigma$ zulässig.

β_1) $$\sigma_b = \frac{p\,\sigma_{fe}\left(1-\frac{2}{3}p\right) + \frac{2\,M\,n}{p\,b\,h_o^2}}{n\left\{(2-p)-p\left(1-\frac{2}{3}p\right)\right\}}$$ wenn $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig.

Aus γ folgen:

γ_1) $$\sigma_{fe} = \frac{n\,\sigma_b\,b\,p\,h_o\,(2-p)}{2\,n\,F_e + b\,p^2\,h_0}$$ wenn $\sigma_b = \sigma$ zulässig.

γ_2) $$\sigma_b = \frac{\sigma_{fe}\,(2\,n\,F_e + b\,p^2\,h_o)}{n\,b\,p\,h_o\,(2-p)}$$ wenn $\sigma_{fe} = \sigma$ zulässig.

Setzt man $\alpha_1 = \gamma_1$ und $\beta_1 = \gamma_2$, so folgt:

α_2) $$\sigma_b = \frac{2\,M}{b\,p\,h_o^2\left\{(2-p)-2\,p\left(1-\frac{2}{3}p\right)\frac{n\,F_e + b\,p\,h_o}{2\,n\,F_e + b\,p^2\,h_o}\right\}},$$

wenn M, b, p, h_o, n und F_e bekannt sind.

β_2) $$\sigma_{fe} = \frac{2\,M\,n\,(2-p)}{(2\,n\,F_e\,h_o + b\,p^2\,h_o^2)\left\{(2-p)-p\left(1-\frac{2}{3}p\right)\right\} - b\,p^2\,h_o^2\,(2-p)\left(1-\frac{2}{3}p\right)}$$

wenn M, b, p, h_o, n und F_e bekannt sind.

Aus α' oder β' folgen:

α'_1)
$$c = 1{,}5 + \sqrt{2{,}25 - \frac{6M}{\sigma_b\, b\, h_o^2}}, \quad \text{wenn } \sigma_b = \sigma \text{ zulässig.}$$

Hat man c gerechnet, dann folgt aus

$$c = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_{fe}}{n}}, \quad \text{der Wert für } \sigma_{fe} = \frac{n\,\sigma_b}{c}(1 - c).$$

β'_1)
$$c^2(3 - c) = \frac{6n}{\sigma_{fe}}\,\frac{M}{b h_o^2}(1 - c), \quad \text{wenn } \sigma_{fe} = \sigma \text{ zulässig.}$$

Hieraus c am leichtesten durch Annahme zweier Werte in der Nähe der Wurzel der Gleichung und durch Regula falsi den für die Rechnung genügend genauen Wert von c ermitteln.

Hat man c gerechnet, dann folgt aus

$$c = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_{fe}}{n}} \quad \text{der Wert für } \sigma_b = \frac{\sigma_{fe}\, c}{n(1 - c)}.$$

Aus γ' folgen:

γ'_1)
$$\sigma_{fe} = -\frac{n\,\sigma_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{n\,\sigma_b}{2}\right)^2 + \frac{n\, b\, h_o\, \sigma_b^2}{2 F_e}}, \quad \text{wenn } \sigma_b = \sigma \text{ zulässig.}$$

γ'_2)
$$\sigma_b = \frac{F_e\,\sigma_{fe}}{b\, h_o} + \sqrt{\left(\frac{F_e\,\sigma_{fe}}{b\, h_o}\right)^2 + \frac{2 F_b\, \sigma_{fe}^2}{n\, b\, h_o}}, \quad \text{wenn } \sigma_{fe} = \sigma \text{ zulässig.}$$

Setzt man die aus α'_1 und γ'_1 resultierenden σ_{fe} einander gleich, resp. die aus β'_1 und γ'_2 resultierenden σ_b einander gleich, so erhält man die wie bei $x > d$, entsprechende Formel α'_2 für die Bestimmung von σ_b, resp. β'_2 für die Bestimmung von σ_{fe} direkt aus den gegebenen Größen M, b, h_o, n und F_e. Da letztere Formeln nicht leicht aufgebaut erscheinen und auch für die Rechnung umständlich, so empfiehlt es sich, die Anwendung der Leitsätze zur Bestimmung von x anzuwenden, alsdann σ_{fe} und σ_b nach bekannten Regeln zu bestimmen oder nachdem $x = c\,h_o$ und damit $c = \frac{x}{h_o}$ gerechnet worden ist nach den Leitsätzen, die Formeln α_2 resp. β_2 anzuwenden, indem man in diesen statt p den Wert c einsetzt. Denn es gehen die Formeln für $x < d$ aus denen für $x > d$ hervor, wenn man in letzteren $p = c$ einsetzt.

b) Formeln für doppelte Armierung.*)

Mit Bezug auf nebenstehende Figur 4 und auf das bekannte Proportionalitätsgesetz:

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_{fe}} = \frac{x}{n(h_o - x)}, \quad \text{worin } n = \frac{E_e}{E_b}.$$

*) Vergleiche die hierfür gemachten Mitteilungen in diversen Zeitschriften, u. a. in „Zement und Beton“ von Hrn. Dr. Ing. Weiske, in „Beton und Eisen“ von Hr. Dipl.-Ing. Elwitz.

lassen sich allgemein giltige Formeln ableiten, die zur Bestimmung der erforderlichen Armierung (Zugeisen sowohl wie Druckeisen) eine beliebige Ausnutzung der Inanspruchnahme beider Materialien Beton und Eisen gestatten, wie folgt:

Fig. 4.

a = Abstand des Druckmittelpunktes der Betondruckflächen von der Oberfaser. Für Dreiecksflächen ist $a = \frac{1}{3}x$; für Trapezflächen von der Höhe d (Deckenstärke) ist $a = \frac{d}{3}\,\frac{3x-2d}{2x-d}$.

a' = Abstand des Druckmittelpunktes der Beton- und Eisendruckflächen von der Oberfaser.

$x = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_{fe}}{n}}\,h_o = c\,h_o$, also für beliebig angenommene und zulässige σ_b und σ_{fe} ist der Wert von x von vornherein bestimmt.

Zugkraft Z im Eisen unten ist gleich der Druckkraft D im Beton und Eisen oberhalb der Neutralfaser. Biegungsmoment der äußeren Kräfte M ist gleich dem Biegungsmomente der inneren Kräfte $M_Z = M_D$.

Aus $Z = D$ folgt:

$$F_e\,\sigma_{fe} = F_e\,\sigma_b\,\frac{h_o - x}{x}\,n = \sigma_b\,b_o\,\frac{x}{2} + \sigma_b\,(b - b_o)\,d\,\frac{2x-d}{2x} + F_e'\,\sigma_{fe}',$$

da nun $\sigma_{fe}' = \sigma_b\,\frac{x-e'}{x}\,n$, so wird unter Abzug der eigentlichen Druckeisenfläche, die bereits einmal in der Betondruckfläche enthalten ist:

$$F_e\,\sigma_b\,\frac{h_o - x}{x}\,n = \sigma_b\left[b_o\,\frac{x}{2} + (b - b_o)\,d\,\frac{2x-d}{2x} + F_e'\,\frac{x-e'}{x}\,(n-1)\right]$$

oder

$$(1.)\qquad F_e' = \frac{n\,F_e\,(h_o - x) - b_o\,\frac{x^2}{2} - (b - b_o)\,\frac{d}{2}\,(2x-d)}{(x-e')\,(n-1)}$$

Aus $M = M_D = M_Z$ folgt:

$$M = \sigma_b\,b_o\,\frac{x}{2}\left(h_o - \frac{x}{3}\right) + \sigma\,(b - b_o)\,d\,\frac{2x-d}{2x}\left(h - \frac{d}{3}\,\frac{3x-2d}{2x-d}\right)$$

$$+ F_e'\,\sigma_b\,\frac{x-e'}{x}\,(n-1)\,(h_o - e'),$$

oder:

$$(2)\quad Fe' = \frac{\frac{M}{\sigma_b}x - b_o\frac{x^2}{2}\left(h_o - \frac{x}{3}\right) - (b - b_o)\frac{d}{2}(2x - d)\left(h_o - \overbrace{\frac{d}{3}\,\frac{3x - 2d}{2x - d}}^{a}\right)}{(x - e')(n - 1)(h_o - e')}$$

Durch Gleichsetzung von 1 und 2 erhält man die erforderliche Zug-Eiseneinlage:

$$(3)\quad F_e = \frac{\frac{M}{\sigma_b}x + b_o\frac{x^2}{2}\left(\frac{x}{3} - e'\right) + (b - b_o)\frac{d}{2}(2x - d)(a - e')}{(h_o - e')(h_b - x)\,n}.$$

Werden die Druckspannungen im Steg unterhalb der Deckenplatte vernachlässigt, so ist $b_o = o$ und hiermit:

$$(3')\quad F_e = \frac{\frac{M}{\sigma_b}x + b\frac{d}{2}(2x - d)(a - e')}{(h_o - e')(h_o - x)\,n}.$$

Ist die Lage der Neutralfaser innerhalb der Deckenplatte, so ist $b_o = b$ und hiermit:

$$(3'')\quad F_e = \frac{\frac{M}{\sigma_b}x + b\frac{x^2}{2}\left(\frac{x}{3} - e'\right)}{(h_o - e')(h_o - x)\,n}.$$

Die Formeln 3, 3', 3'' geben direkt die erforderliche Zugeiseneinlage an für Plattenbalken mit $x \lesseqgtr d$, und zwar Formel 3 mit Berücksichtigung der Druckspannungen im Balkensteg unterhalb der Decke, Formel 3' mit Vernachlässigung ebengenannter Spannungen und Formel 3'' für Deckenplatten oder Plattenbalken mit $x \leqq d$.

Ist F_e berechnet, so wird die Zugkraft im Eisen:

$$(4)\quad Z = F_e\,\sigma_{fe}.$$

Da $Z = \sigma_b\left[b_o\frac{x}{2} + (b - b_o)\,d\,\frac{2x - d}{2x}\right] + F_e'\sigma_{fe}' = D_b + F_e'\sigma_{fe}'$

und $\sigma_{fe}' = \sigma_b\,\frac{x - e'}{x}\,(n - 1)$ unter einmaligem Abzug der Druck-Eiseneinlage, so ergibt sich die erforderliche Druck-Eiseneinlage zu:

$$(5)\quad F_e' = \frac{Z - D_b}{\sigma_{fe}'},$$

wobei D_b die Druckkraft im Beton bedeutet, und zwar mit Berücksichtigung der Stegspannungen ist

$$D_b = \sigma_b\left[b_o\frac{x}{2} + (b - b_o)\,d\,\frac{2x - d}{2x}\right],$$

mit Vernachlässigung der Stegspannungen ist

$$D_b = \sigma_b \cdot b \cdot d\,\frac{2x - d}{2x}$$

und für Deckenplatten oder Plattenbalken mit $x \leqq d$ ist

$$D_b = \sigma_b \cdot b \cdot \frac{x}{2}.$$

Ist $D_b > Z$, so sind keine Druckeisen erforderlich, und berechnet sich die Querschnittsdimensionierung des Balkens, resp. der Decke nach den graphischen Tabellen, resp. graphisch und analytisch dargestellten Formeln.

Vorstehende Erörterungen über die doppelte Armierung von Decken und Balken mögen noch durch ein Zahlenbeispiel ergänzt werden.

Nebenstehender Balken (Fig. 5) habe einem Biegungsmomente

$M = 15\,000\,000$ cm/kg

zu widerstehen.

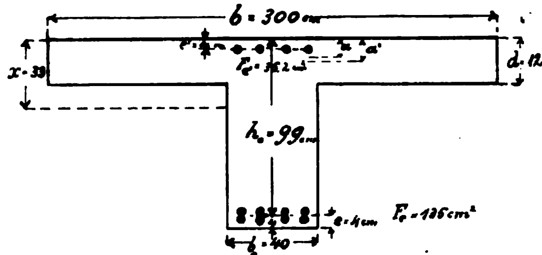


Fig. 5.

Als beliebig angenommene, aber zulässige Spannungen seien die nach den preußischen Ministerialvorschriften angegebenen

$$\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2 \text{ und } \sigma_{fe} = 1200 \text{ kg/cm}^2; \quad \frac{E_f}{E_b} = n = 15.$$

$$x = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \frac{\sigma_{fe}}{n}} h_0 = \frac{40}{40 + \frac{1200}{15}} 99 = 33 \text{ cm}; \quad \sigma_{fe}' = \sigma_b \frac{x - e'}{x}(n-1)$$

$$= 40 \cdot \frac{29}{33} \cdot 14 = 492 \text{ kg/cm}^2.$$

$$a = \frac{d}{3}\frac{3x - 2d}{2x - d} = \frac{12}{3} \cdot \frac{99 - 24}{66 - 12} = 5{,}55 \text{ cm}; \quad a - e' = 5{,}55 - 4{,}00 = 1{,}55 \text{ cm}.$$

$$D_b = \sigma_b\left[b_0 \frac{x}{2} + (b - b_0) d \frac{2x - d}{2x}\right] = 40\left[40 \frac{33}{2} + 300 \cdot 12 \frac{66 - 12}{66}\right] = \mathbf{144206} \text{ kg}.$$

$$\textbf{Nenner} = (h_0 - e')(h_0 - x)\, n = 95 \cdot 66 \cdot 15 = \mathbf{94050}$$

$$\frac{M}{\sigma_b} x = \frac{15\,000\,000}{40} \cdot 33 = 12\,375\,000$$

$$+ b_0 \frac{x^2}{2}\left(\frac{x}{3} - e'\right) = 21\,780\,(11 - 4) = 152\,460$$

$$+ (b - b_0)\frac{d}{2}(2x - d)(a - e') = 300 \cdot 6 \cdot 54 \cdot 1{,}55 = 150\,660$$

$$\textbf{Zähler} = \mathbf{12\,678\,120}$$

$$F_e = \frac{12\,678\,120}{94\,050} = \mathbf{135} \text{ cm}^2.$$

$$Z = F_e\, \sigma_{fe} = 135 \cdot 1200 = 162\,000 \text{ kg}.$$

[Abstand vom Zug- und Druckmittelpunkt ergibt sich demnach aus

$$\frac{M}{Z} = y = \frac{15\,000\,000}{162\,000} = 92{,}73 \text{ cm}.$$

Die Berechnung dieses Abstandes ist nach vorstehender Erörterung nicht erforderlich, kann jedoch als Kontrolle dienen, wenn man die Druckeisen bestimmt hat, somit auch die gesamte Druckkraft D, dessen Schwerpunktslage in bezug auf die Balkenoberfaser leicht ermittelt werden kann zu a', und prüft, ob $h_0 - a' = y$ ist*.]

---

*) Für dies Beispiel wird $a' = \dfrac{40 \cdot 40 \cdot \frac{33}{2} \cdot 11 + 40 \cdot 300 \cdot 12 \cdot \frac{66 - 12}{66} \cdot 5{,}55 + 36{,}2 \cdot 492 \cdot 4}{40 \cdot 40 \cdot \frac{33}{2} + 40 \cdot 300 \cdot 12 \cdot \frac{66 - 12}{66} + 36{,}2 \cdot 492}$

$$a' = \frac{290400 + 653885 + 71176}{162000} = \frac{1015461}{162000}$$

$a' = 6{,}27$ cm; $y = h_0 - a' = 99 - 6{,}27 = \mathbf{92{,}73}$ cm.

$$F_e' = \frac{Z - D_b}{\sigma_{fe}'} = \frac{162000 - 144206}{492} = \mathbf{36{,}2\ cm^2}.$$

Demnach für $M = 15\,000\,000$ cm/kg, $h_0 = 99$ cm, $d = 12$ cm, $\sigma_{fe} = 1200$ kg/cm² und $\sigma_b = 40$ kg/cm² wird:

$$\boldsymbol{F_e = 135\ cm^2,\ F_e' = 36{,}2\ cm^2}.$$

Wollte man die Stegdruckspannungen vernachlässigen, so würde:

$$F_e = \frac{12375000 + \frac{340}{300} \cdot 150660}{94050} = \frac{12545500}{94050} = \mathbf{133{,}5\ cm^2};$$

$$Z = 133{,}5 \cdot 1200 = 160200 \text{ kg};$$

$$D_b = 40 \cdot 340 \cdot 12 \cdot \frac{66 - 12}{66} = 133800 \text{ kg};$$

$$F_e' = \frac{160200 - 133800}{492} = \mathbf{53{,}7\ cm^2}.$$

Die Herstellung graphischer Tabellen zur Querschnittsdimensionierung doppelt armierter Träger behält sich der Verfasser vor.